Nosso objetivo é publicar obras com qualidade editorial e gráfica.
Para expressar suas sugestões, dúvidas, críticas e eventuais reclamações, entre em contato conosco.

CENTRAL DE ATENDIMENTO AO CONSUMIDOR
Rua Major Paladino, 128 • Bloco 3 • 05307-000 • São Paulo • SP
Fone: (11) 3706-1466 • Fax: (11) 3706-1462
www.editoranobel.com.br
atendimento@editoranobel.com.br

ALFREDO DOS REIS PRINCIPE JUNIOR

• Cel. Ref. do Exército — Engenheiro Militar
• Ex-professor titular de Geometria Descritiva da Faculdade de Engenharia da Universidade Católica de Petrópolis (RJ).

NOÇÕES DE GEOMETRIA DESCRITIVA

VOLUME I

Reimpresso em 2009

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Principe Júnior, Alfredo dos Reis, 1915-1990
Noções de geometria descritiva / Alfredo dos Reis Principe Júnior. – São Paulo : Nobel, 1983.

ISBN 978-85-213-0163-9

1. Geometria descritiva I. Título.

83-1069 / CDD-515

Índice para catálogo sistemático:
1. Geometria descritiva 515(17.)604.201516(18.)

ÍNDICE

CAPÍTULO I

CAPÍTULO II

CAPÍTULO III

CAPÍTULO IV

CAPÍTULO V

DEDICATÓRIA

Ao meu recém-nascido neto ALFREDO NEY, pela alegria que sua chegada proporcionou a toda a família, dedico esta edição, desejando-lhe uma vida de ventura e felicidade, crescendo em ambiente de paz, carinho e muito amor.

Rio, 1989
O Autor

CAPÍTULO I

Geometria Descritiva é a ciência que tem por fim representar num plano as figuras do espaço de maneira tal que, nesse plano, se possam resolver todos os problemas relativos a essas figuras. Ela foi criada no fim do século XVIII pelo matemático francês GASPAR MONGE.

Projeção ortogonal de um ponto

A projeção ortogonal de um ponto é o pé da perpendicular baixada do ponto ao plano. Assim pois, na fig.1, A é a projeção do ponto (A) sobre o plano α (alfa). Chama-se projetante de um ponto, a perpendicular baixada deste ponto ao plano de projeção. Na fig.1 ao lado, (A)A é a projetante do ponto (A).

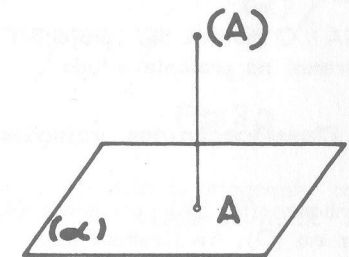



Fig. 1

Obs.: Um ponto individualizado no espaço — ponto objetivo — é representado por uma letra maiúscula do alfabeto latino dentro de um parêntese e sua projeção pela mesma letra sem parênteses.

DETERMINAÇÃO DO PONTO

Para que um ponto fique bem determinado, podemos empregar dois métodos diferentes:

- método dos planos cotados;
- método das projeções.

No primeiro método, emprega-se apenas um plano de projeção e a cota do ponto. (Cota de um ponto é o comprimento da sua projetante). Nesse método, o plano de projeção é o plano horizontal tomado como plano de comparação e é chamado Plano Cotado porque nele se inscreve a cota do ponto (positiva

acima e negativa abaixo desse plano). Uma reta por exemplo, será representada pela sua projeção horizontal e pelas cotas de dois dos seus pontos. Assim, a reta (A)(B) da fig.2 seria representada pela projeção horizontal AB e as cotas dos dois pontos, significando, no caso, que o ponto (A) possui cota igual a duas unidades e o ponto (B) igual a três unidades.

Quanto ao segundo método, para que um ponto fique bem determinado, uma só projeção não é suficiente, porque, conforme vemos na fig. 3, o ponto A é a projeção no plano (α), de qualquer ponto da perpendicular ilimitada Δ (delta).

Então para que um ponto fique bem determinado, emprega-se o método da dupla projeção, de Monge, que veremos pouco mais adiante, depois de estudarmos as projeções.

NOTA: O método das projeções é o que seguiremos no presente estudo

Fig. 2

Fig. 3

Classificação das projeções

Suponhamos (fig.3A) um ponto (A) no espaço, um plano qualquer (α) e um observador em (O). Se fizermos passar por (A) um raio visual partindo de (O) até encontrar o plano (α), vemos que A será a projeção de (A) sobre o plano de projeção (α), e a reta (O)(A)A será a projetante. O ponto (O) será o centro de projeção e esse sistema chama-se Cônico ou Perspectivo (alguns autores chamam de Projeção Central).

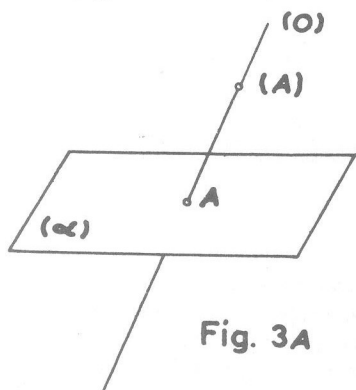



Fig. 3A

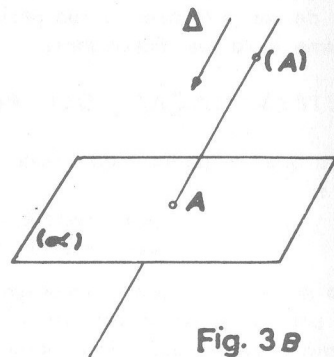
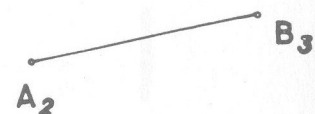
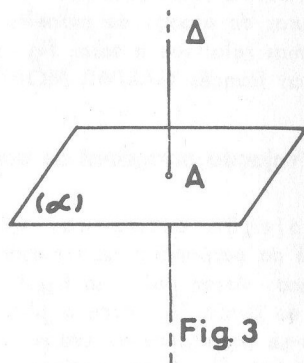



Fig. 3B

Se considerarmos agora o ponto (O) lançado ao infinito, conservando-se o mesmo ponto (A) e o plano (α), a projetante será paralela à uma direção Δ (delta) e o sistema de projeção chama-se Cilíndrico ou Paralelo. Neste caso, — o centro de projeção lançado ao infinito, — este ponto diz-se impróprio. As figuras 3C e 3D esclarecem melhor ao considerarmos uma reta (A)(B) projetada no plano (α) quando o centro de projeção está a uma distância finita ou não do plano, ficando assim bem caracterizadas as projeções cônicas ou cilíndricas respectivamente.

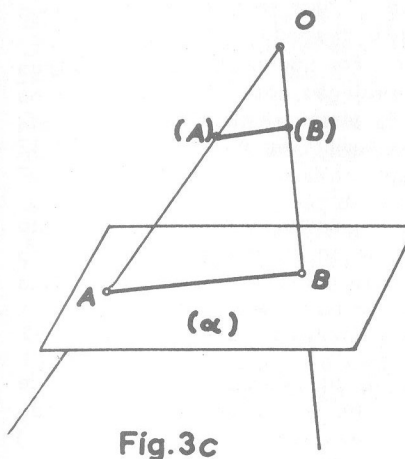
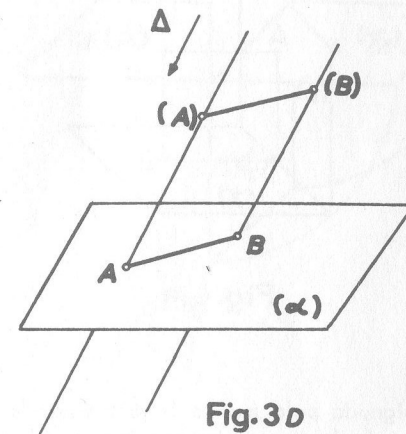



Fig. 3C Fig. 3D

Ainda no caso das projeções cilíndricas, elas podem ser oblíquas ou ortogonais conforme a direção de Δ seja ou não perpendicular ao plano de projeção. A fig. 3E nos mostra uma projeção cilíndrica ortogonal.

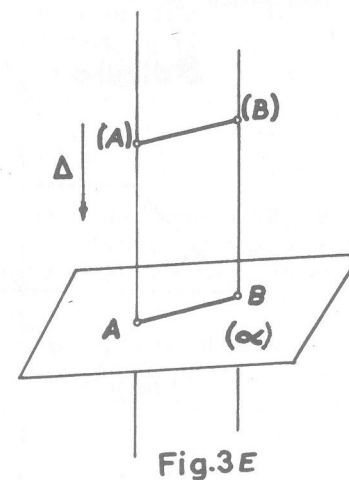



Fig. 3E

Estudo do ponto

Já conhecidas as diferentes projeções, podemos então dizer em que consiste o método da dupla projeção de MONGE, para determinação de um ponto (A). Consiste em determinar duas projeções ortogonais sobre dois planos perpendiculares, um horizontal representado por (π) e outro vertical(π')que se interceptam segundo uma linha chamada linha de terra. (Fig. 4). Por convenção, o ponto (O), centro de projeção, considera-se situado na frente do plano vertical e acima do plano horizontal, e a uma distância infinita deles.

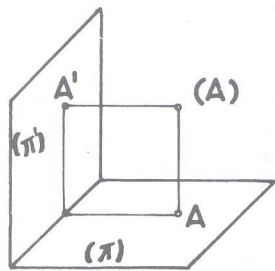



Fig. 4

Sobre cada plano, a projeção do ponto (A) é o pé da perpendicular baixada do ponto sobre o plano. O ponto (A) fica bem determinado pelas interseções (A) A e (A) A'.

A projeção no plano horizontal (π) de um ponto (A) é, também por convenção, designada pela mesma letra maiúscula A, sem parênteses e no plano vertical (π') ainda pela mesma letra com o sinal pouco acima e a direita de uma pequena linha (A') que se lê "A linha".

Os planos de projeção, perpendiculares entre si, formam quatro regiões que são os diedros, como se vê na fig. 5 e quatro semi-planos assim chamados:

Horizontal Anterior: (π_A)

Horizontal Posterior: (π_P)

Vertical Superior: (π'_S)

Vertical Inferior: (π'_I)

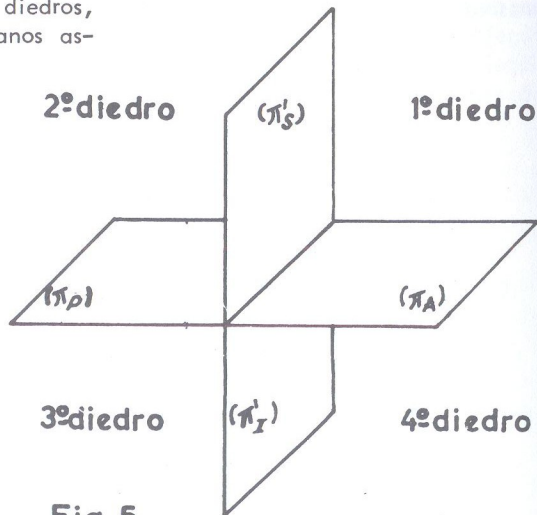



Fig. 5

ÉPURA

Para que se possam representar no plano as figuras do espaço, faz-se o rebatimento do plano vertical sobre o horizontal (no sentido contrário aos ponteiros do relógio), que consiste em fazê-lo girar de 90º em torno da linha de terra (fig.6), de modo que o(π'_S)venha a ficar em coincidência com o(π_P)e consequentemente o(π'_I)também em coincidência com o (π_A).

Fig. 6

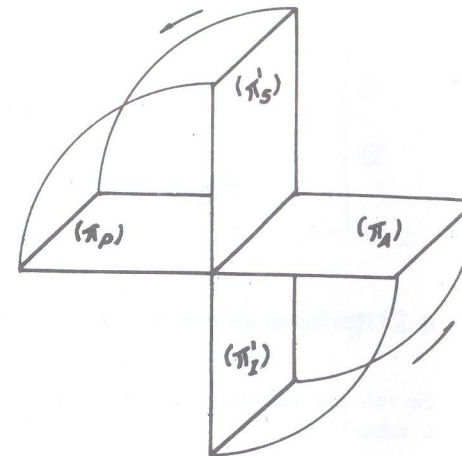
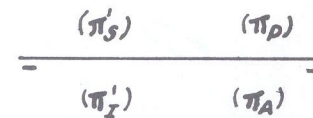
Depois do rebatimento, temos a épura (fig.7) onde a linha de terra é representada por uma linha horizontal $\pi\pi'$. (Na prática é dispensado o uso dessas letras gregas colocando-se apenas dois pequeninos traços horizontais abaixo das suas extremidades).

Então ÉPURA é a representação de uma figura do espaço pelas suas projeções, estando o plano vertical rebatido sobre o horizontal.

(π'S) (πP)

(π'I) (πA)

Fig. 7

Obs.: Como na fig. 7, após o rebatimento, os planos (π'_S) e (π_P)(vertical superior e horizontal posterior), se situam acima da linha de terra e os planos (π'_I) e (π_A)(vertical inferior e horizontal anterior) abaixo dessa linha, conclui-se que todas as projeções naqueles planos se situam nas mesmas posições com relação à linha de terra.

COTA E AFASTAMENTO

Chama-se Cota de um ponto a distância desse ponto ao plano horizontal de projeção e Afastamento a distância do ponto ao plano vertical de projeção. Assim, na fig.4, (A)A é a cota do ponto (A) e (A)A' o afastamento desse mesmo ponto.

Chama-se linha de projeção ou linha de chamada a toda linha perpendicular à linha de terra, que une as projeções de um mesmo ponto. Assim, a linha A'A da fig. 8 que une as projeções do ponto (A), é uma linha de projeção (ou de chamada).

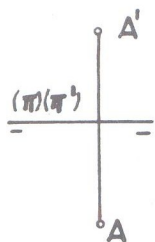



Fig.8

Obs.: A linha de terra, sendo a interseção dos planos (π) e (π'), é representada por estas duas letras do alfabeto grego mas pode-se dispensar a sua colocação sobre ela.

Posições do ponto

Em relação aos planos de projeção, o ponto pode ocupar nove posições diferentes, a saber:

1ª posição: O ponto está no 1º diedro (fig. 9).

Depois do rebatimento, o(π'_S)ficará em coincidência com o(π_P)e a projeção vertical A' acompanhará o plano (π'_S)no seu deslocamento e cairá em A'_1 de tal modo que $A'_1A_o = A'A_o$. Temos na fig. 10 a épura correspondente onde verificamos

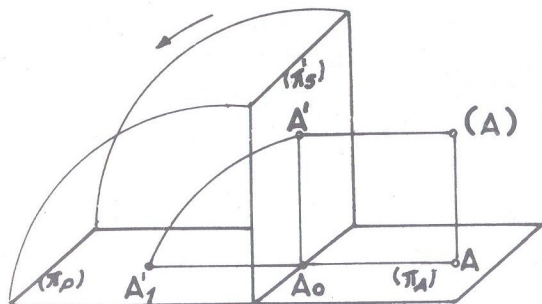



Fig. 9

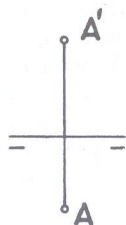



Fig.10

que as projeções são separadas pela linha de terra estando a projeção vertical A' acima e a horizontal A abaixo da referida linha. Na épura, não há necessidade de representar o símbolo A_o que se observa na fig. 9 e também a projeção vertical rebatida A'_1 é apenas representada por A'.

2ª posição: O ponto está no 2º diedro (fig.11).

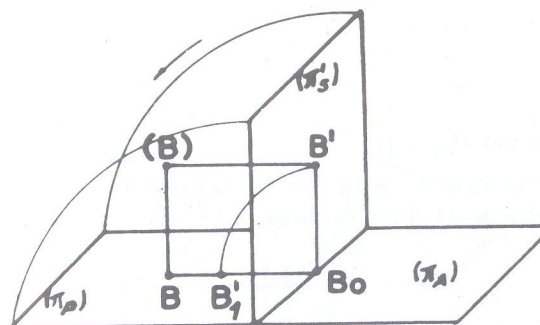



Fig. 11

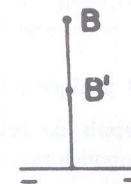



Fig. 12

Depois do rebatimento, a projeção B' vem colocar-se no(π_P), sobre BB_o (ou seu prolongamento) conforme a cota seja menor ou maior que o afastamento. Na épura (fig. 12) ambas as projeções estão acima da linha de terra. É indiferente B estar acima ou abaixo de B'; o que caracteriza o ponto no 2º diedro é possuir ambas as projeções acima da linha de terra.

3ª posição: O ponto está no 3º diedro (fig.13).

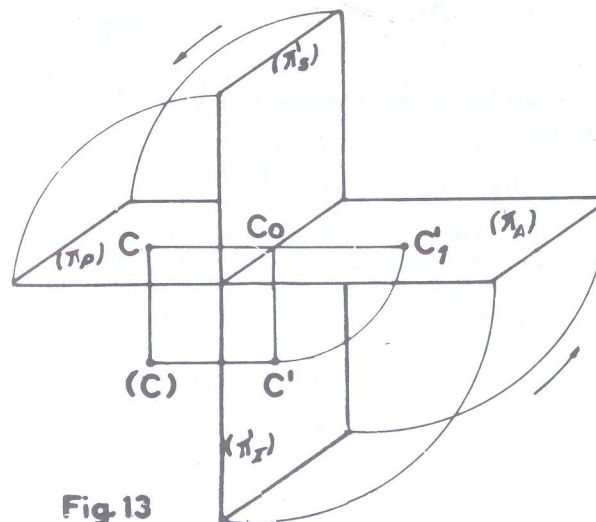



Fig.13

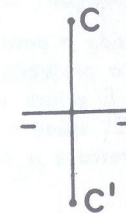



Fig.14

Operando-se o rebatimento, ao mesmo tempo que o vertical superior,(π'_S)vem se colocar em coincidência com o horizontal posterior(π_P)o vertical inferior(π'_I) coincidirá com o horizontal anterior (π_A). Então a projeção vertical C' irá cair em C'_1 no prolongamento de CC_o . A épura (fig. 14) é caracterizada por estar a projeção horizontal C acima da linha de terra e a vertical C' abaixo dessa linha. (É o inverso da épura do ponto no 1º diedro).

4ª posição: O ponto está no 4º diedro (fig. 15).

Depois do rebatimento, a projeção vertical D' cairá em D'_1, sobre DD_o (ou seu prolongamento). Ambas as projeções abaixo da linha de terra (fig. 16) caracterizam

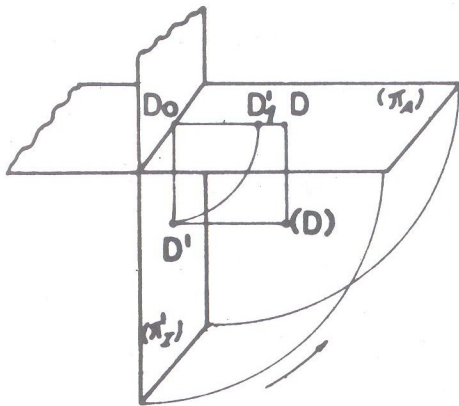
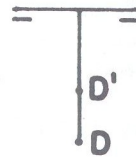



Fig.15 Fig.16

a épura do ponto nesse diedro. Verifica-se que a épura de um ponto no 4º diedro é o inverso da épura no 2º diedro.

5ª posição: O ponto está no(π'_S)(fig. 17).

Estando o ponto (E) no plano vertical superior(π'_S)o seu afastamento será nulo; então a projeção vertical E' coincide com o próprio ponto (E) e a projeção horizontal E estará sobre a linha de terra. Depois do rebatimento, a projeção E' cairá em E'_1 sobre o(π_P). Na épura (fig.18) a projeção vertical E' está acima da linha de terra e a horizontal E sobre essa linha.

(vide figs. 17 e 18 na pág. seguinte)

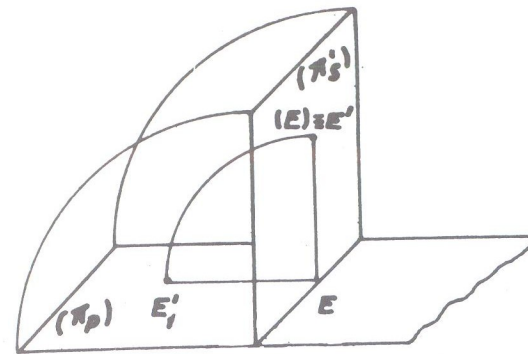
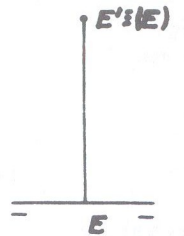



Fig. 17 Fig.18

6ª posição: O ponto está no(π'_I)(fig. 19).

Como no caso anterior, é nulo o afastamento do ponto. Sua projeção vertical F' coincide com o próprio ponto (F) e sua projeção horizontal F estará sobre a linha

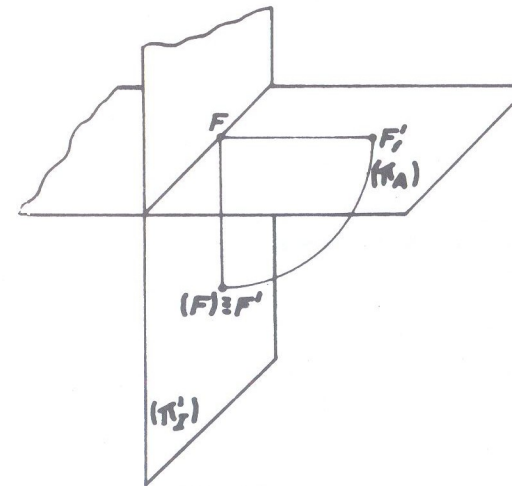
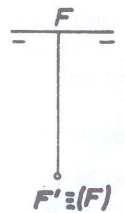



Fig. 19 Fig.20

de terra. Após o rebatimento, a projeção F' cairá em F'_1 sobre o(π_A)e na épura (fig. 20) a projeção vertical está abaixo da linha de terra e a horizontal permanece sobre essa linha.

7ª posição: O ponto está no (π_A) (fig. 21).

Estando o ponto no horizontal anterior (π_A), sua cota será nula; então sua projeção horizontal G coincide com o próprio ponto (G) ou (G) ≡ G. A projeção vertical G' estará sobre a linha de terra. Com o rebatimento nada se altera e na épura (fig. 22) a projeção horizontal G está abaixo da linha de terra e a vertical G' sobre essa linha.

Fig. 21

G'
G≡(G)

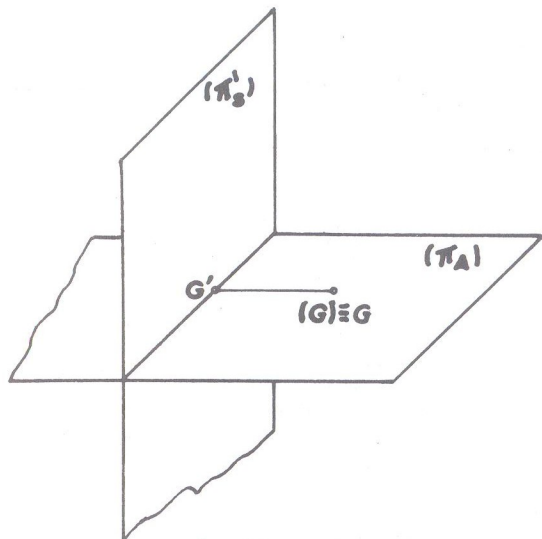
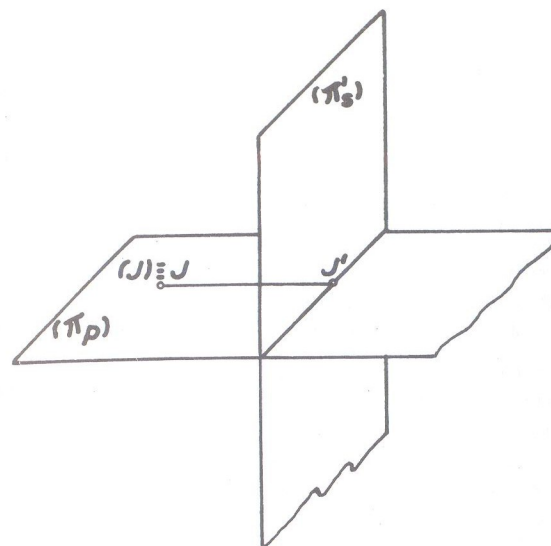
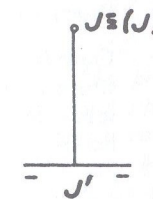



Fig. 22

8ª posição: O ponto está no (π_P) (fig. 23).

Como no caso anterior, é nula a cota do ponto. Também nada se altera com o rebatimento e na épura (fig. 24) a projeção horizontal J está acima da linha de terra e a vertical J' sobre essa linha.

9ª posição: O ponto está na linha de terra (fig. 25).

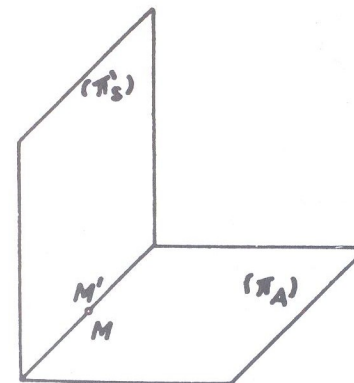
Nessa posição o ponto não terá nem cota nem afastamento. Nada se altera com o rebatimento já que a linha de terra é fixa. A épura de ponto nessa posição é a da fig. 26.

(vide figuras 23, 24, 25 e 26 na página seguinte)

Fig. 23

Fig. 24

Fig. 25

Fig. 26

Recapitulação

Pelo que foi exposto, dada a épura de um ponto, é fácil determinar a sua posição.

••• Quando o ponto não tem nenhuma de suas projeções sobre a linha de terra, ele estará no espaço, da seguinte maneira: se as projeções são separadas pela linha de terra, ele estará em um dos diedros ímpares (1º diedro quando a projeção vertical estiver acima e a horizontal abaixo da linha de terra; no 3º diedro no caso inverso);

••• Quando as projeções estiverem de um mesmo lado da linha de terra, o ponto estará em um dos diedros pares (2º diedro quando ambas as projeções estiverem acima daquela linha e 4º diedro no caso inverso);

••• Quando uma das projeções estiver sobre a linha de terra, o ponto estará situado em um dos semiplanos de nome contrário à projeção que estiver sobre aquela linha. Assim, por exemplo, se um ponto possuir sua projeção horizontal sobre a linha de terra, ele estará situado no plano vertical (π'_S) ou (π'_I), sendo a outra projeção (vertical) que localizará o ponto. Se for a projeção vertical sobre a linha de terra, ele estará no plano horizontal (π_A) ou (π_P) e a outra projeção (horizontal) é que determinará a posição do ponto.

Seja como exemplo determinar as posições dos pontos (A), (B), (C), (D), (E), (F), (G), dados por suas projeções na épura da fig. 27.

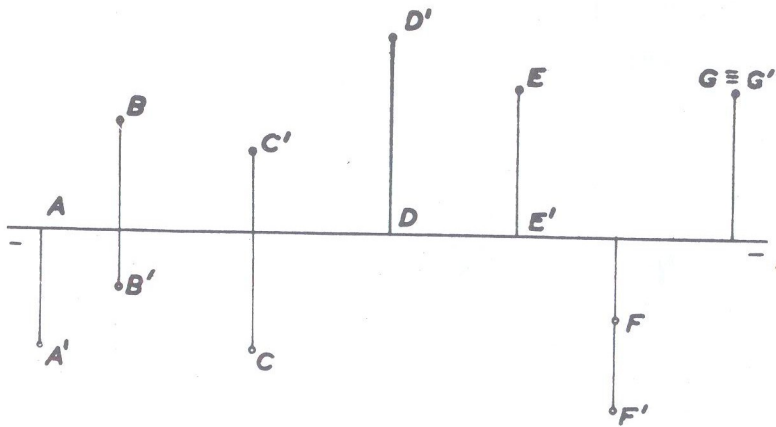



Fig. 27

Procedendo como foi explicado, teremos:

— ponto (A) semiplano vertical inferior (π'_I)
— ponto (B) 3º diedro
— ponto (C) 1º diedro
— ponto (D) semiplano vertical superior (π'_S)
— ponto (E) semiplano horizontal posterior (π_P)
— ponto (F) 4º diedro
— ponto (G) 2º diedro (na posição especial de possuir cota igual a afastamento e que veremos pouco mais adiante.

Coordenadas

A cota e o afastamento de um ponto constituem as suas coordenadas. Na prática, o ponto necessita de mais outra coordenada — a abscissa — que não influi na sua posição, sendo tomada sobre a linha de terra a partir de um ponto 0 (zero) considerado origem e arbitrariamente marcado sobre aquela linha; quando positiva, é marcada para a direita e quando negativa, para a esquerda da origem. Também a cota e o afastamento podem ser positivos ou negativos.

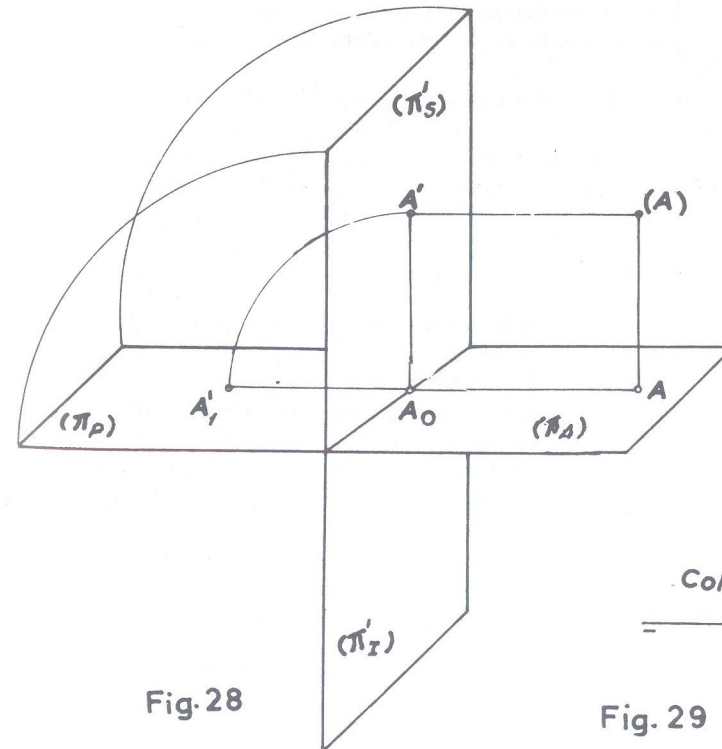



Fig. 28

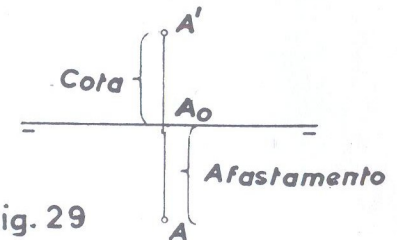



Fig. 29

Seja a fig. 28 e sua respectiva épura na fig. 29. A figura $(A)A'A_0A$ é um quadrilátero (quadrado ou retângulo) e, em qualquer das hipóteses tem-se que $(A)A=A'A_0$. Mas como no rebatimento A' coincide com A'_1, resulta que $A_0A'_1$ também representa a cota e está na épura representada pelo segmento A_0A' acima da linha de terra. A cota é positiva quando acima do plano horizontal (π), portanto no 1º ou 2º diedro. Será negativa quando abaixo desse plano, ou seja no 3º ou 4º diedros. O afastamento (A)A' é positivo quando, observando a fig. 28 de frente, estiver à direita do plano vertical (π'), isto é, no 1º ou 4º diedros, sendo negativo no caso contrário, ou seja, à esquerda do plano(π')(2º ou 3º diedros).

Tem-se então:

No espaço:
- Cota positiva: 1º e 2º diedros
- Cota negativa: 3º e 4º diedros
- Afastamento positivo: 1º e 4º diedros
- Afastamento negativo: 2º e 3º diedros

Em épura:
- Cota positiva: acima da linha de terra
- Cota negativa: abaixo da linha de terra
- Afastamento positivo: abaixo da linha de terra
- Afastamento negativo: acima da linha de terra

As coordenadas são pois: abscissa (x), afastamento (y) e cota (z), nessa ordem.

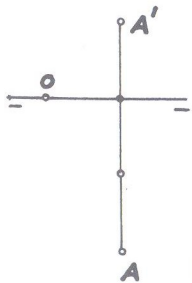



Fig. 30

Seja como exemplo dar a épura do ponto (A) [1 ; 2 ; 1] (fig. 30). (A unidade é o centímetro). A origem O é tomada arbitrariamente em qualquer lugar da linha de terra; a abscissa igual a 1, como é positiva é marcada à direita dessa origem. O afastamento igual a 2, como é positivo é marcado para baixo da linha de terra e a cota igual a 1, sendo positiva é marcada para cima da linha de terra. O ponto então está no 1º diedro, o que aliás a simples inspeção das coordenadas já nos indicava, porque cota e afastamento positivos significa ponto no 1º diedro.

Dadas as coordenadas de um ponto, é fácil saber onde o mesmo está situado, usando-se o seguinte processo: traçam-se dois eixos ortogonais XX' e YY' que representam: (fig. 31)

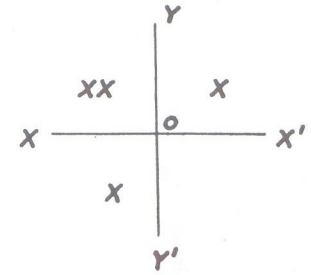



Fig. 31

Semi eixo OX': Semiplano horizontal anterior (π_A)

Semi eixo OX : Semiplano horizontal posterior (π_P)

Semi eixo OY : Semiplano vertical superior (π'_S)

Semi eixo OY': Semiplano vertical inferior (π'_I)

As regiões determinadas por esses eixos são os diedros que já conhecemos.

Seja, por exemplo, o ponto (A) [2 ; - 1 ; 2] que desejamos saber onde está situado.

Como a abscissa não influi na posição do ponto, começamos com o afastamento, o qual no exemplo dado é negativo (-1); como o afastamento negativo significa ponto à esquerda do plano vertical(π') marcam-se duas pequenas cruzes nas regiões à esquerda do eixo YY' que representa o plano vertical, isto é, uma cruz em cada diedro que pode estar contido o ponto e que são 2º ou 3º. Verificando-se a cota que é positiva (2), ela será então tomada acima do eixo XX' que representa o plano horizontal (π), podendo ser horizontal anterior(π_A) ou posterior(π_P); marca-se então, também, uma cruz em cada região que pode estar contido o ponto de cota positiva, que são 1º ou 2º diedros; a região onde aparecer duas cruzes é o diedro em que o ponto dado está situado, que, no caso, é o 2º diedro.

2º exemplo: (B) [-1 ; 3 ; -2]

Da mesma forma que anteriormente, (fig. 32) tem-se ponto no 4º diedro.

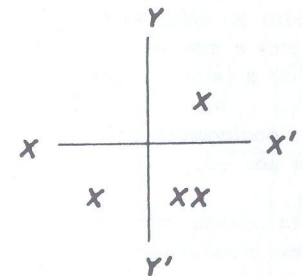



Fig. 32

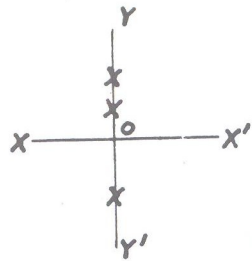



Fig.33

3º exemplo: (C) [1 ; 0 ; 2]

Afastamento sendo nulo, o ponto se situa no eixo YY', isto é, plano vertical (fig. 33). Então uma cruz no semi-eixo OY e outra no semi eixo OY'. A cota positiva (2) significa ponto acima do plano horizontal ou seja no eixo OY. Então o ponto (C) está no semiplano vertical superior (π'_S).

Obs.: Em todos os casos acima apontados como exemplos, se recorremos à épura teremos confirmadas as posições pela situação das projeções em relação à linha de terra.

- **Ponto no plano bissetor**

Plano bissetor é o plano que divide o diedro em duas regiões iguais (fig. 34).

Só existem dois planos bissetores: o 1º bissetor cortando os diedros ímpares (1º e 3º) e o 2º bissetor cortando os diedros pares (2º e 4º).

O 1º bissetor é representado pela letra do alfabeto grego (β) (beta) e com os números 1 e 3 ou a letra I pouco abaixo. (β_{13} ou β_I). O 2º bissetor analogamente é representado por (β_{24} ou β_P)

O ponto quando está situado no plano bissetor tem afastamento e cota iguais (ver ponto (G) da fig. 27).

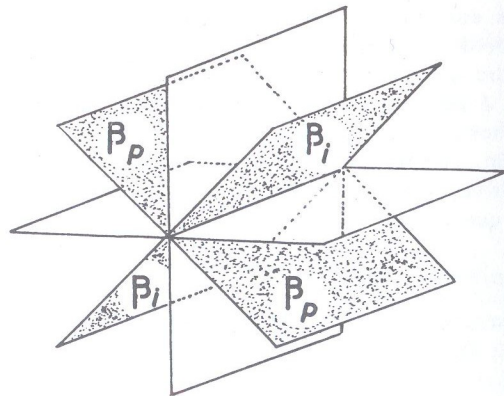



Fig. 34

- **Simetria de pontos**

Dois pontos (A) e (B) são simétricos em relação a um plano (α), quando este plano é o mediador do segmento formado pelos dois pontos, isto é, quando o plano é perpendicular ao segmento formado por esses dois pontos e contendo o seu ponto médio, (fig. 35), onde o segmento (A)(M) é igual ao segmento (M)(B).

Vamos aqui considerar a simetria de um ponto em relação:

1º) aos planos de projeção;

2º) aos planos bissetores;

3º) à linha de terra.

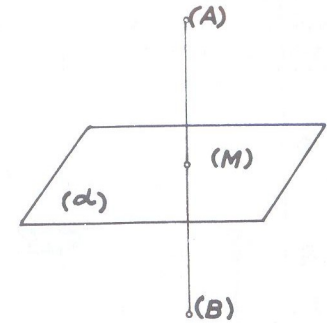



Fig. 35

1º) PONTOS SIMÉTRICOS EM RELAÇÃO AOS PLANOS DE PROJEÇÃO

Diz-se que um ponto (B) é simétrico a um ponto (A) em relação ao plano horizontal de projeção (π) (fig. 36) quando possui a mesma abscissa, o mesmo afastamento em grandeza e sentido e a cota da mesma grandeza porém de sentido contrário, co

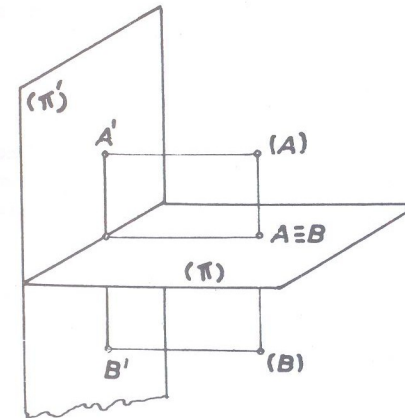



Fig. 36

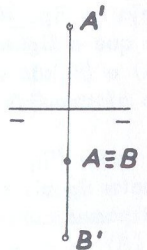
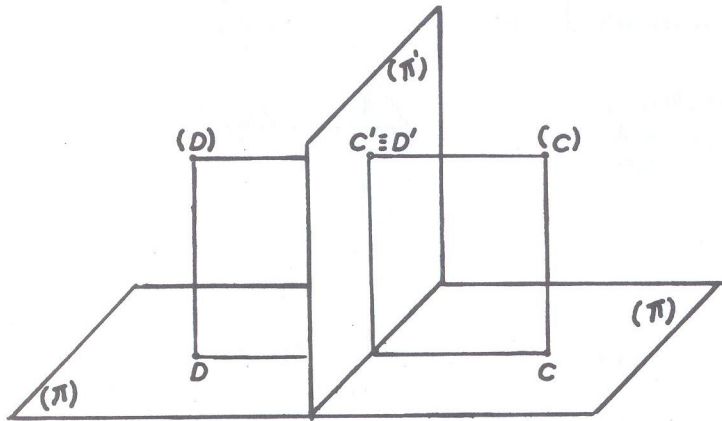



Fig. 37

mo nos mostra a épura da fig. 37, onde os afastamentos dos pontos (A) e (B) são iguais e ambos positivos (mesmo sentido) e cotas iguais de sentido contrário, pois a cota de (A) é positiva porque o ponto está acima do plano (π) e do ponto (B) é negativa porque o ponto está abaixo de (π).

Diz-se que um ponto (D) é simétrico a um ponto (C) em relação ao plano vertical de projeção(π ')(fig. 38) quando possui a mesma abscissa, a mesma cota em grandeza e sentido e o afastamento da mesma grandeza porém de sentido contrário.

Fig. 38 Fig 39

A épura (fig. 39) se caracteriza por possuírem os pontos projeções verticais coincidentes C' ≡ D' e projeções horizontais C e D simétricas em relação à linha de terra.

2º) PONTOS SIMÉTRICOS EM RELAÇÃO AOS PLANOS BISSETORES

Seja na fig. 40 o ponto (A) e a reta que representa o 1º bissetor (β_I). Verifica-se que a figura (A)A'MA é um retângulo igual ao formado por (B)B'MB, e, como (A) e (B) são simétricos (portanto mesma abscissa), a cota de um dos pontos é igual ao afastamento do outro e vice-versa.

A épura (fig. 41) se caracteriza por abscissas iguais; afastamento e cota de um dos pontos iguais respectivamente a cota e afastamento do outro, isto é, as projeções de nomes contrários simétricas em relação à linha de terra.

(vide figuras 40 e 41 na página seguinte)

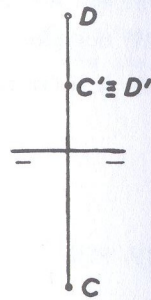
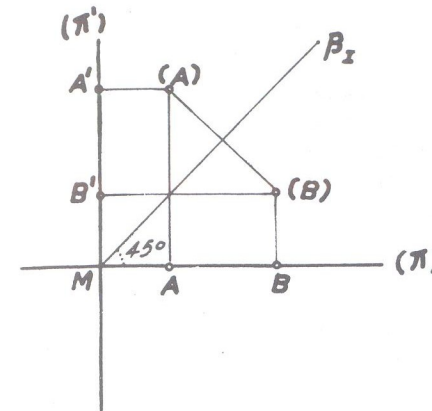
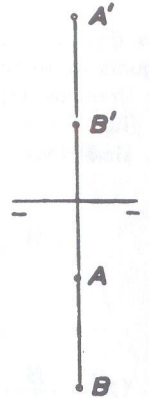



Fig. 40 Fig. 41

Seja na fig. 42, o ponto (A) e a reta que representa o 2º bissetor (β_P).

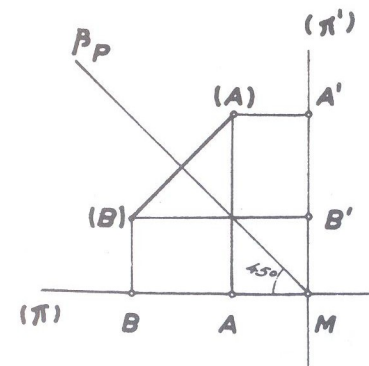
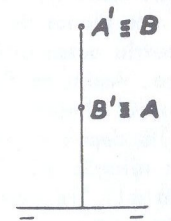



Fig 42 Fig. 43

Por razões análogas ao caso anterior, verifica-se que as abscissas são iguais e que a cota de um é simétrica ao afastamento do outro e reciprocamente. A épura (fig. 43) se caracteriza por abscissas iguais e cota de (A) igual ao afastamento de (B) e cota de (B) igual ao afastamento de (A). Portanto, as projeções de nomes contrários são coincidentes.

3º) PONTOS SIMÉTRICOS EM RELAÇÃO À LINHA DE TERRA

Seja a fig. 44 onde a linha de terra $\pi\pi'$ é a mediatriz do segmento (A)(B). Então são iguais os retângulos que se observam na figura e os pontos simétricos em relação à linha de terra possuem abscissas iguais e cotas e afastamentos simétricos. A épura (fig. 45) é caracterizada pelas projeções de mesmo nome dos dois pontos (A) e (B), simétricas em relação à linha de terra.

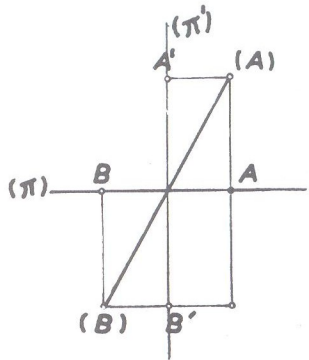



Fig. 44

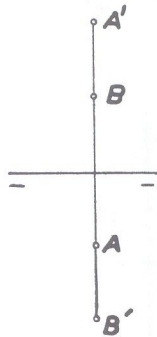



Fig. 45

Obs.: A simetria em relação à linha de terra $\pi\pi'$ é o produto das simetrias em relação aos planos (π) horizontal e (π') vertical e assim, para se obter o simétrico de um ponto dado em relação à linha de terra, pode-se efetuar a simetria em relação a um dos planos de projeção e a seguir a simetria desse último em relação ao outro plano. Assim, na fig. 46, determina-se o ponto (C) simétrico de (A) em relação a (π) e depois o ponto (B) simétrico de (C) em relação a (π') ou o ponto (D) em relação a (π') e depois o ponto (B) em relação a (π).

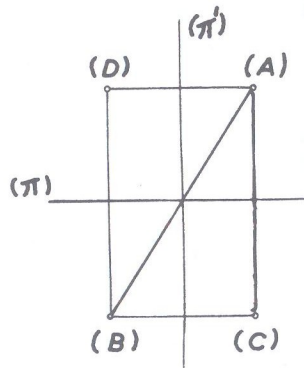



Fig. 46

A seguir a parte prática do Capítulo I com numerosos exercícios.

Exercícios referentes ao capítulo I

1. Dar a épura de um ponto situado no 1º diedro:
   1º) mais perto do plano (π) que do plano (π');
   2º) mais perto de (π') que de (π).

SOLUÇÃO: (fig. 47)

1º item: Se o ponto tem que estar mais perto de (π), terá que possuir cota menor que afastamento ($z < y$) e o ponto (A) soluciona.

2º item: É o inverso do item anterior ($z > y$) e o ponto (B) é a solução.

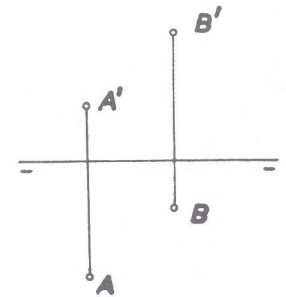



Fig. 47

2. Dar a épura dos pontos: (A) [-1 ; -2 ; -1]
   (B) [0 ; 1,5 ; -2]
   (C) [1,5 ; 1 ; 1,5]

SOLUÇÃO: (fig. 48)

O ponto (A) está no 3º diedro; o ponto (B) no 4º diedro e o ponto (C) no 1º diedro.

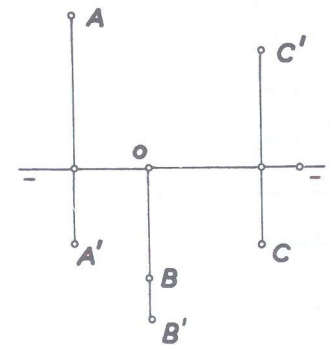



Fig. 48

3 • Dar a épura dos pontos : (A) [0 ; 0 ; 2]
(B) [-1 ; 2 ; 0]
(C) [2 ; -1 ; 0]

SOLUÇÃO: (fig. 49)

O ponto (A) está no semiplano vertical superior (π_S); sua projeção vertical A' coincide com o próprio ponto (A) e por isso se escreve A' ≡ (A). Da mesma forma o ponto (B) está no horizontal anterior (π_A) e sua projeção horizontal B coincide com (B) e portanto B ≡ (B). O ponto (C) está no horizontal posterior (π_P) e portanto C ≡ (C) por estar sua projeção horizontal C em coincidência com o próprio ponto (C).

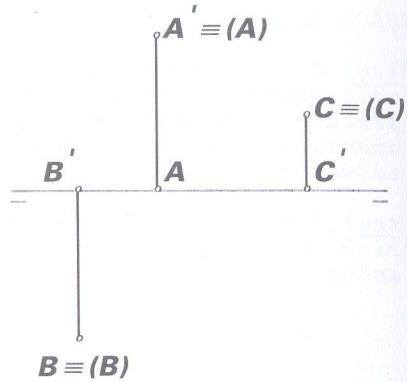



Fig. 49

4 • Dar a épura dos pontos : (A) [-1 ; 2 ; 0] (C) [0 ; -1,5 ; 0]
(B) [-3 ; 0 ; 0] (D) [2 ; -1 ; 1]

SOLUÇÃO: (fig. 50)

(A) ⟶ (π_A)

(B) ⟶ ($\pi\pi'$)

(C) ⟶ (π_P)

(D) ⟶ *2.º diedro e bissetor*

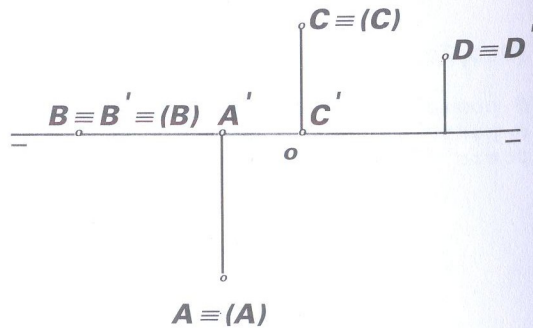



Fig. 50

5 • Dar a épura dos pontos (A), (B), (C), (D) e (E) situados: (A) no(π_A); (B) no 4º diedro e mais perto de (π') do que (π); (C) em $\pi\pi'$; (D) no(π'_S) e (E) no(π_P).

SOLUÇÃO: (fig. 51)

D' ≡ (D)
E ≡ (E)
A'
C ≡ C' ≡ (C)
D
E'
B
A ≡ (A)
B'

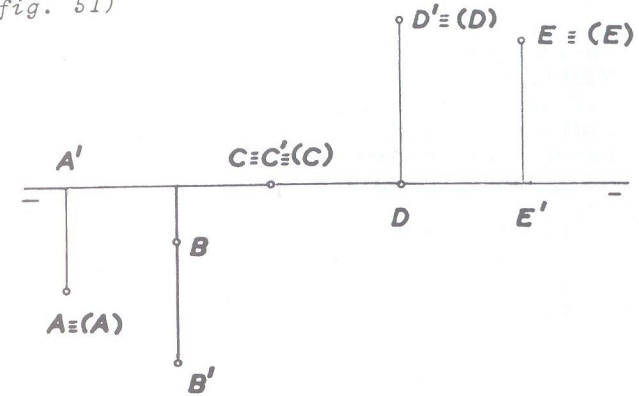



Fig. 51

6 • Dar a épura de um ponto (A) no 2º diedro com a cota igual a 1/3 do afastamento.

SOLUÇÃO. (fig. 52)

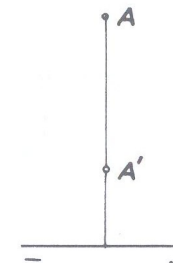



Fig. 52

7 • Traçar a épura dos pontos (A) e (B) situados respectivamente no 1º e 2º bissetores, sabendo-se que: (A) [-2 ; 1,5 ; ?] e (B) [1 ; ? ; 2]

SOLUÇÃO: (fig. 53)

Do ponto (A) não se conhece a cota. Implicitamente, porém, ela é dada porque se disse que o ponto está no 1º bissetor. Mas, 1º bissetor pode ser 1º ou 3º diedro; porém como o afastamento dado é positivo não pode ser 3º diedro. Igual raciocínio para a solução do ponto (B), porque se a cota é positiva e ele está no bissetor par só pode ser 2º diedro, porque no 4º diedro a cota não seria positiva. Marca-se então B ≡ B'.

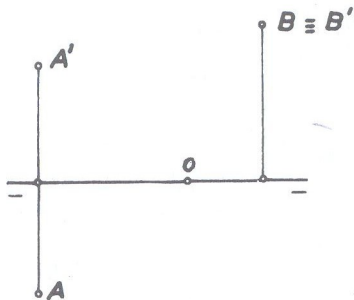



Fig.53

8 • São dados os pontos (A) [0 ; 1 ; 2] e (B) [3 ; -3 ; 1,5]. Pedem-se as projeções de um ponto:

1º) simétrico a (A) em relação ao plano (π)
2º) simétrico a (B) em relação ao plano (π ')

SOLUÇÃO: (fig. 54)

Pelo que foi exposto no estudo anterior sobre simetria de pontos, tem-se:

1º) ponto (C) no 4º diedro

2º) ponto (D) no 1º diedro

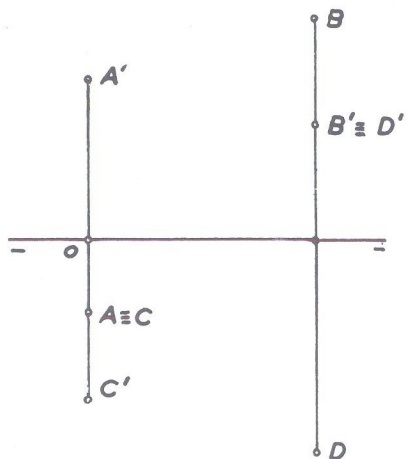



Fig.54

9 • São dados os pontos (A) [1 ; 1 ; 1,5] e (B) [3 ; -1 ; 2]. Pedem-se as projeções de um ponto:

1º) simétrico a (A) em relação ao (β_I)
2º) simétrico a (B) em relação ao (β_P)

SOLUÇÃO: (fig. 55)

1º) ponto (C)

2º) ponto (D)

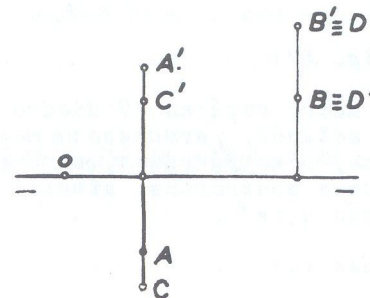



Fig.55

10 • Determinar as coordenadas de um ponto (B) simétrico a (A) [1 ; 0 ; -2] em relação a (π) .

SOLUÇÃO: (fig. 56)

O ponto dado está no (π'_I); logo, o ponto (B) solução está no (π'_S) e suas coordenadas são (B) [1 ; 0 ; 2] pois como já foi estudado, somente a cota troca de sentido, isto é, de negativa passa para positiva.

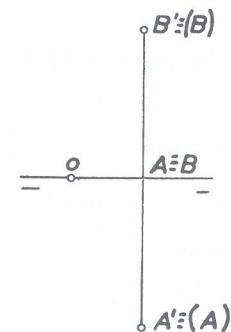



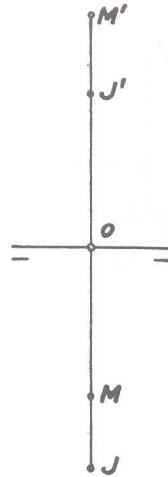
Fig.56

11 • Determinar as coordenadas de um ponto (J) simétrico a (M) [0 ; 2 ; 3] em relação ao (β_I) .

Fig. 57

SOLUÇÃO: (fig. 57)

O ponto (M) dado, está no 1º diedro. O ponto (J) solução, permanece no mesmo diedro mas, como já vimos, com projeções de nomes contrários simétricas em relação a ππ' .

As coordenadas são: (J) [0 ; 3 ; 2]

12 • Preencha as lacunas:

1) Chama-se cota de um ponto ....

....

2) Linha de projeção ou de chamada é a linha ....

....

que une ....

3) Em relação aos planos de projeção um ponto pode ocupar .... posições diferentes.

4) O diedro em que um ponto tem cota e afastamento negativos é o ....

5) Em épura, cota negativa é marcada .... da linha de terra.

6) Um ponto situado no .... tem cota e afastamento iguais.

7) Dois pontos são simétricos em relação a um plano quando ....

....

....

....

8) A simetria de dois pontos em relação à linha de terra é o produto das .....

....

....

NOTA: A solução desse exercício está no fim do capítulo (após o exercício 15).

13 • Determinar as coordenadas de um ponto (A) simétrico a (B) [1 ; 2 ; 3] em relação a ππ' .

SOLUÇÃO: (fig. 58)

Como as projeções de mesmo nome do ponto solução serão simétricas em relação a ππ' resulta:

(A) [1 ; -2 ; -3]

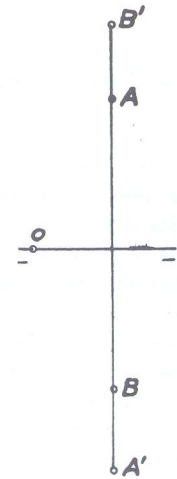



Fig. 58

14 • O ponto (A) é simétrico de (B) em relação ao (β_I); (B) é simétrico de (C) em relação a (π') e (C) é simétrico de (D) $[0 ; 3 ; 1,5]$ em relação a (π). Pede-se determinar as coordenadas de (A).

SOLUÇÃO: (fig. 59)

O ponto (D) está no 1º diedro; seu simétrico (C) em relação a (π) passa então para o 4º diedro; o ponto (B) simétrico a (C) em relação a (π') passa para o 3º diedro e finalmente o ponto (A) cujas coordenadas se pedem e é simétrico a (B) em relação ao bissetor ímpar, permanece no 3º diedro com as coordenadas.

(A) $[0 ; -1,5 ; -3]$

B
D' ≡ A
o
C' ≡ B'
D ≡ C ≡ A'

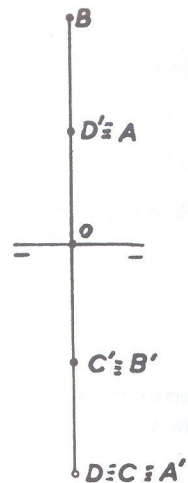



Fig 59

15 • Grife o C ou E conforme a proposição esteja certa ou errada respectivamente.

1	A Geometria Descritiva foi criada por GASPAR MONGE no Século XVII.	C	E
2	No método dos Planos Cotados é empregado apenas um plano.	C	E
3	Para se obter a épura, o rebatimento do plano vertical sobre o horizontal é feito no sentido contrário dos ponteiros do relógio.	C	E
4	O afastamento de um ponto é positivo quando está acima do plano horizontal e negativo quando está abaixo.	C	E

5	Um ponto terá cota tanto menor quanto mais próximo estiver do plano horizontal de projeção.	C	E
6	Um ponto no 2º diedro possui as coordenadas negativas.	C	E
7	Um ponto situado no (π') possui cota nula.	C	E
8	Quando a projeção horizontal de um ponto está sobre a linha de terra, o ponto objetivo está no plano vertical.	C	E
9	Existem tantos planos bissetores quantos são os diedros formados pelos planos de projeção.	C	E
10	Quando dois pontos são simétricos em relação a um plano, este contém o ponto médio do segmento formado pelos dois pontos.	C	E

SOLUÇÃO: Após a solução do Exercício 12.

SOLUÇÃO AO EXERCÍCIO 12:

1) *a distância desse ponto ao plano horizontal de projeção;*
2) *perpendicular à linha de terra que une as duas projeções de um mesmo ponto;*
3) *nove;*
4) *3º;*
5) *abaixo;*
6) *plano bissetor;*
7) *este plano é o mediador do segmento formado pelos dois pontos;*
8) *simetrias em relação aos dois planos (π) e (π').*

SOLUÇÃO AO EXERCÍCIO 15:

Perguntas	*Respostas*
1	E
2	C
3	C
4	E
5	C
6	E
7	E
8	C
9	E
10	C

CAPÍTULO II

• Estudo da reta

A projeção de uma reta sobre um plano é o lugar das projeções de todos os seus pontos sobre esse plano.

Seja na figura 60 a reta (A)(B) e o plano (π) . Baixando de todos os pontos da reta perpendiculares ao plano, os pés dessas perpendiculares dão lugar à projeção ortogonal da reta. Essas perpendiculares formam um plano (α) perpendicular ao plano (π) e que é o plano projetante da reta.

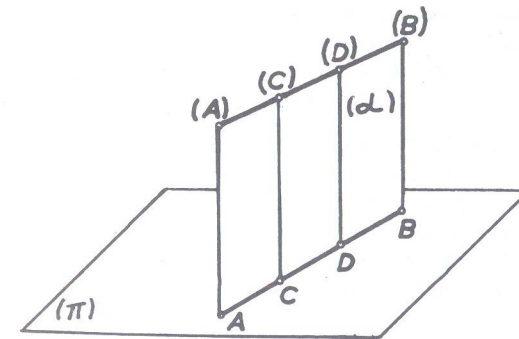



Fig.60

Os pés das perpendiculares estão na interseção dos dois planos e a projeção da reta (A)(B) é portanto essa interseção.

A projeção de uma reta sobre um plano só deixa de ser uma reta, quando ela lhe

for perpendicular, pois nesse caso a projeção será um ponto, como se vê na fig. 61. Nesse caso a projeção da reta se reduz a um ponto porque as projetantes de todos os seus pontos se confundem com a própria reta.

Quando uma reta for paralela a um plano (fig. 62) a sua projeção sobre esse plano é igual e paralela à própria reta. Seja a reta (A)(B) paralela ao plano (π) cuja projeção nesse plano é a reta AB. As duas retas (A)(B) e AB formam com as projetantes (A)A e (B)B um paralelogramo no qual (A)(B) = AB. Diz-se então que a reta se projeta em verdadeira grandeza (V.G.).

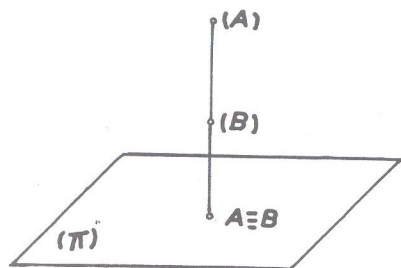
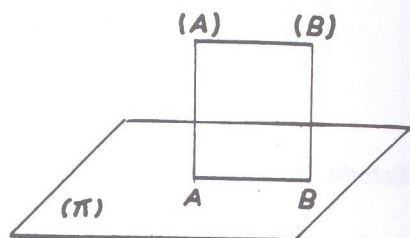



Fig 61

Fig 62

Quando uma reta for oblíqua a um plano (fig. 63) a projeção é menor que a reta do espaço porque esta forma com sua projeção e as projetantes um trapézio retângulo em que a projeção no plano sendo perpendicular às bases é menor que a reta do espaço.

O comprimento da projeção de uma reta sobre um plano varia com a inclinação dela sobre o plano. Ela passa por todos os valores, de zero (caso do ponto quando a reta é perpendicular ao plano) até o limite máximo igual ao comprimento da reta (caso da reta paralela ao plano).

Seja na fig. 64 a reta (A)(B) perpendicular ao plano (π). Suponhamos que a reta girando em torno de (A) ocupe as posições $(A)(B_1)$, ... $(A)(B_2)$, $(A)(B_3)$, etc., cujas projeções no plano (π) serão respectivamente AB, AB_1, AB_2, AB_3, etc.

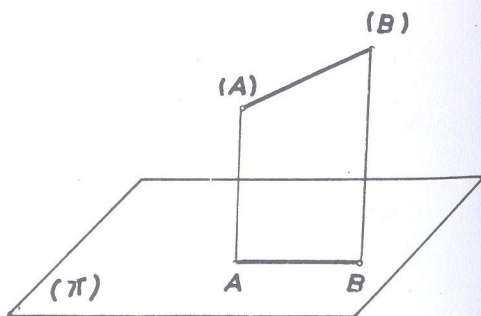



Fig. 63

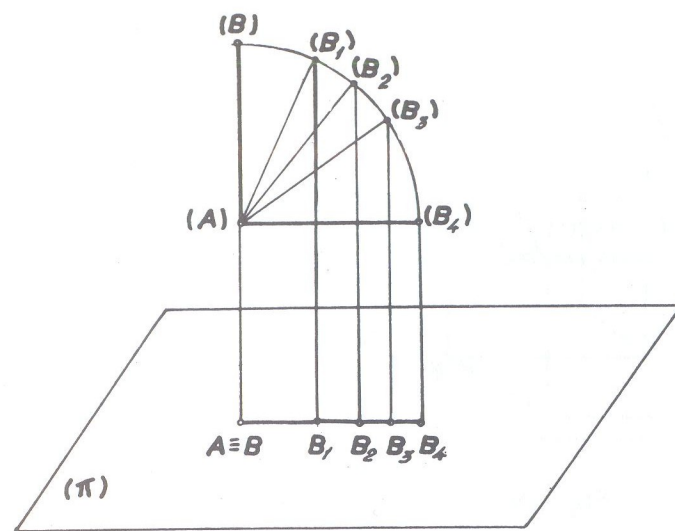



Fig. 64

Verifica-se que sua projeção na posição inicial era o ponto A ≡ B (A coincidente com B) e que essa projeção torna-se AB_1 quando o ponto (B) atinge a posição (B_1) e vai crescendo gradativamente a proporção que a reta vai diminuindo a sua inclinação sobre o plano. Quando a reta atinge a posição $(A)(B_4)$ paralela ao plano, a sua projeção torna-se AB_4. Por conseguinte, a projeção de uma reta sobre um plano é tanto maior quanto menor for sua inclinação sobre ele.

DETERMINAÇÃO DE UMA RETA

De um modo geral, a posição de uma reta no espaço fica bem determinada quando são conhecidas as projeções dessa reta sobre dois planos ortogonais.

Sejam na fig. 65 os dois planos (π) e (π') perpendiculares e AB e A'B' respectivamente as projeções da reta (A)(B) cuja posição queremos determinar. Por AB faz-se passar um plano perpendicular ao plano (π), o mesmo acontecendo com A'B' em relação a (π'). Cada um dos planos, que são os planos projetantes da reta nos respectivos planos de projeção, deve conter a reta do espaço, que será então a interseção desses dois planos projetantes. E como esses planos se cortam segundo (A)(B), que é a única que tem AB e A'B' como projeções, ela fica bem determinada.

Para se designar a reta cujas projeções são AB e A'B' escreve-se: reta (A)(B) (fig. 66).

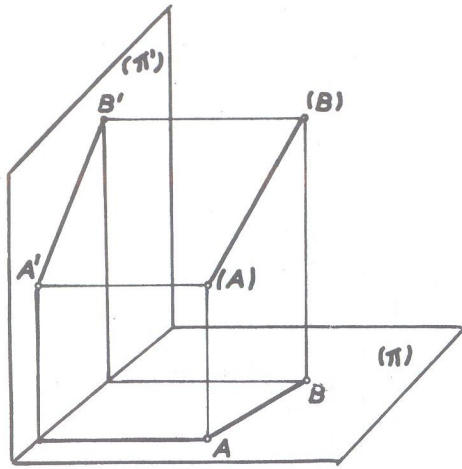



Fig. 65

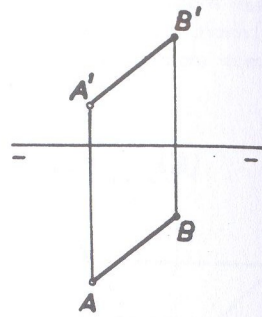



Fig. 66

Obs.: Uma reta pode também ser designada por letras minúsculas que representam suas projeções, ou por uma letra minúscula entre parênteses, como a reta r, r' ou reta (r).

Pertinência de ponto e reta

Já sabemos que três pontos em linha reta projetam-se em geral, segundo três pontos também em linha reta. (Exceto quando os pontos estão na mesma perpendicular ao plano, pois nesse caso a projeção da reta se reduz a um ponto, como já vimos).

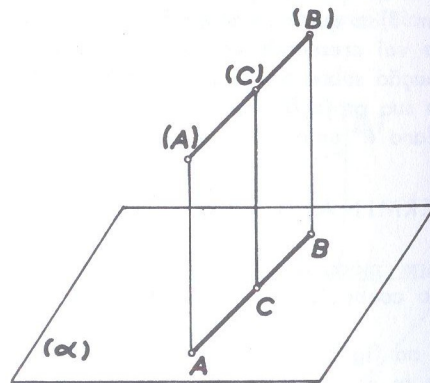
Verifica-se então (fig. 67) que, se o ponto (C) pertence à reta (A)(B), a projeção C pertence à projeção AB.

Surge então a:

Fig. 67

REGRA GERAL:

> Um ponto pertence a uma reta, quando as projeções desse ponto estão sobre as projeções de mesmo nome da reta, isto é, a projeção horizontal do ponto sobre a projeção horizontal da reta e projeção vertical também sobre a projeção vertical da reta.

Na fig. 68, temos a épura de vários pontos que pertencem às retas correspondentes, isto é, ponto A'A pertencendo à reta r'r ; ponto B'B pertencendo à reta t't e finalmente ponto C'C pertencendo à reta (E)(F) dada pelas projeções E'F' e EF.

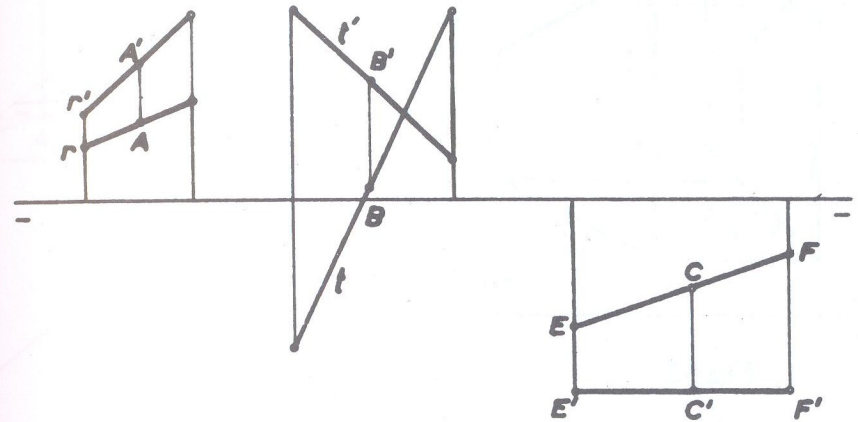



Fig. 68

Obs.: Essa regra de ponto pertencer à reta sofre exceção quando se trata de reta de perfil, como veremos mais adiante (figuras 123 a 126).

Posições da reta

Em relação aos planos de projeção, a reta pode ocupar várias posições, posições essas que determinam nomes e propriedades particulares.

Vejamos cada uma delas de per si :

I) RETA QUALQUER

É a reta oblíqua aos dois planos de projeção (fig. 69). Sua épura é caracterizada por possuir ambas as projeções oblíquas à linha de terra (fig. 70)

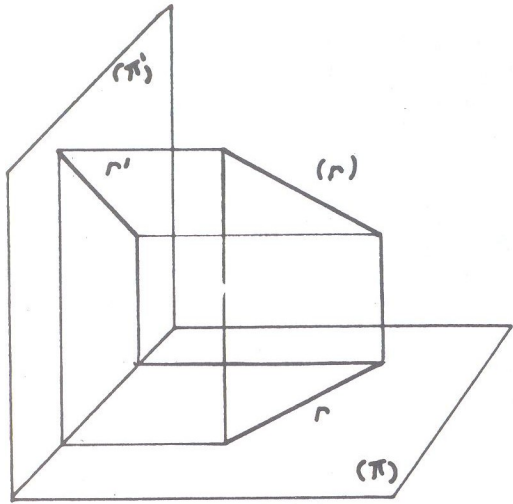



Fig.69

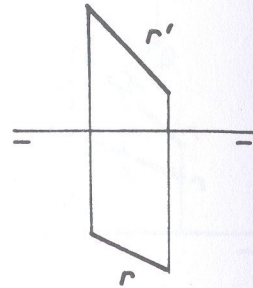



Fig. 70

II) Retas segundo o paralelismo em relação aos planos de projeção.

RETA HORIZONTAL (OU DE NÍVEL)

É a reta paralela ao plano horizontal (π) e oblíqua ao vertical (π'). Sua épura é caracterizada por possuir a projeção vertical paralela à linha de terra e a projeção horizontal oblíqua a essa mesma linha (fig. 71 e 72). A projeção horizontal representa a verdadeira grandeza.

RETA FRONTAL (OU DE FRENTE)

É a reta paralela ao plano vertical (π') e oblíqua ao horizontal (π). Sua épura é caracterizada por possuir a projeção horizontal paralela à linha de terra e a vertical oblíqua a essa mesma linha (fig. 73 e 74). A projeção vertical representa a V.G..

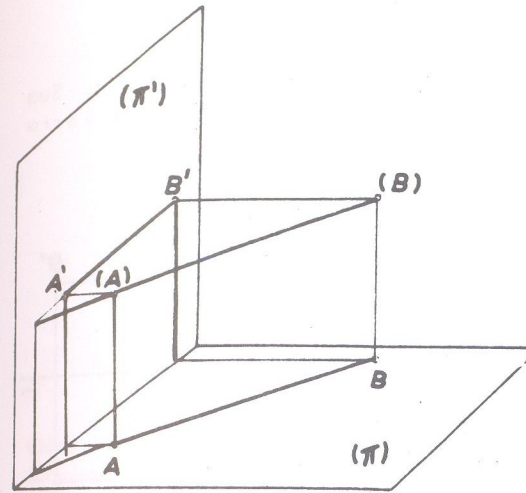



Fig. 71

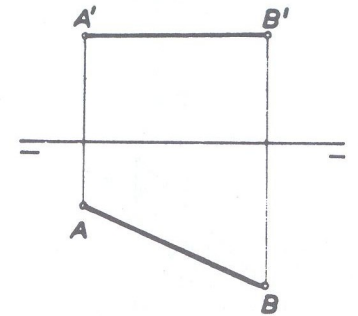



Fig. 72

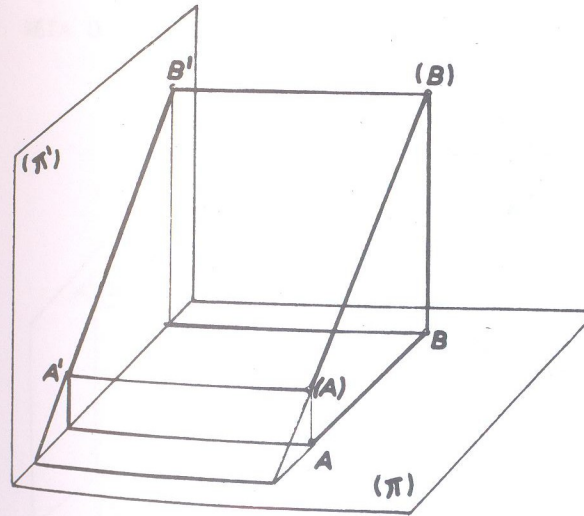



Fig. 73

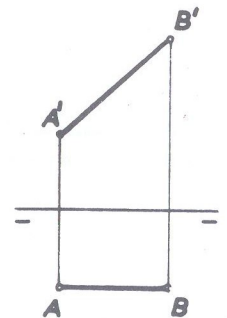



Fig. 74

RETA FRONTOHORIZONTAL (PARALELA À LINHA DE TERRA)

É a reta paralela simultaneamente aos dois planos de projeção (π) e (π'). Sua épura é caracterizada por possuir ambas as projeções paralelas à linha de terra (fig. 75 e 76). Qualquer das projeções (que são iguais) representa a V.G..

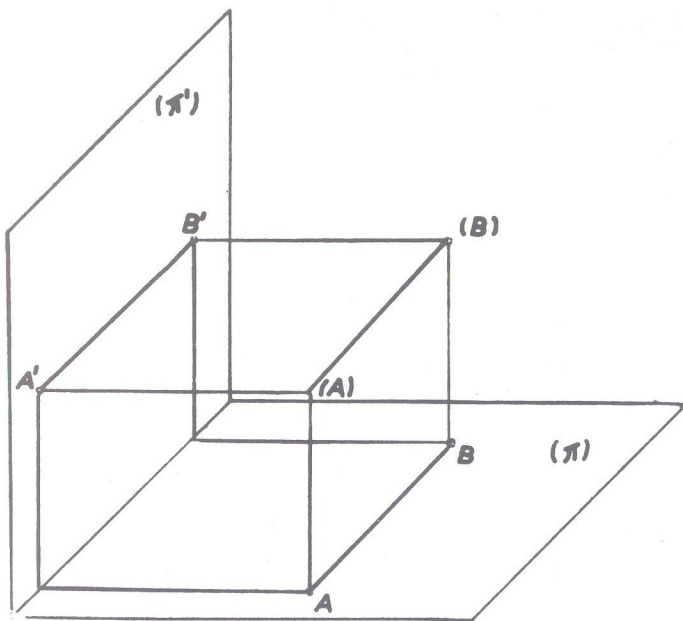



Fig.75

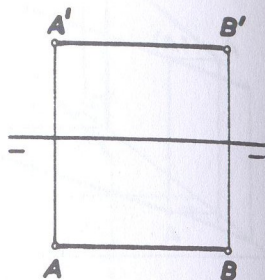



Fig.76

III - Retas segundo o perpendicularismo em relação aos planos de projeção

RETA VERTICAL

É a reta perpendicular ao plano horizontal (π). Sua épura é caracterizada por possuir a projeção horizontal reduzida a um ponto (chamada projeção puntual) e a vertical perpendicular à linha de terra (fig. 77 e 78), e que representa a V.G.

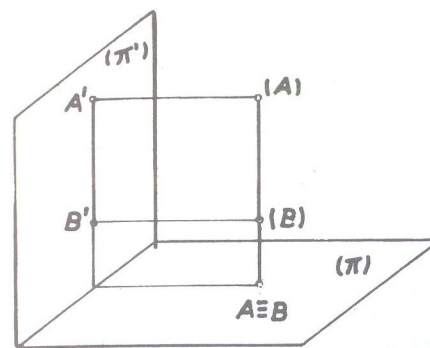



Fig.77

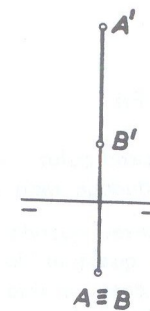



Fig.78

Obs.: A reta vertical, pelo fato de ser perpendicular ao plano horizontal, é forçosamente paralela ao plano vertical. A recíproca não é verdadeira porque a paralela ao plano vertical pode deixar de ser perpendicular ao horizontal, como é o caso da reta frontal. Por isso, ela é estudada segundo o seu perpendicularismo em relação ao plano de projeção.

RETA DE TOPO

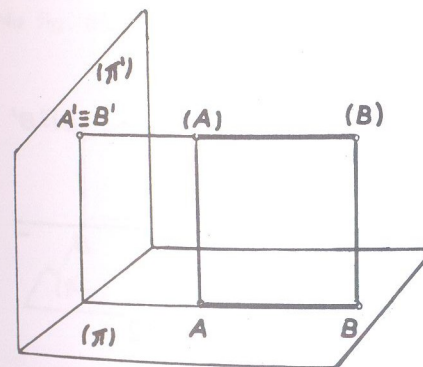



Fig. 79

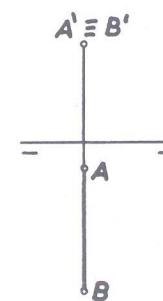



Fig. 80

Inversamente à reta vertical, reta de topo é a perpendicular ao plano vertical (π'). Sua épura é caracterizada por possuir a projeção vertical reduzida a um ponto e a horizontal perpendicular à linha de terra (fig. 79 e 80), que representa a V.G.

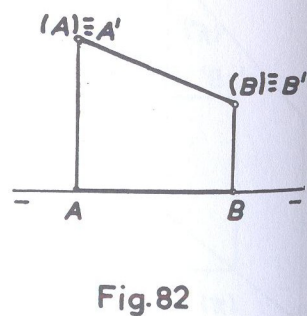
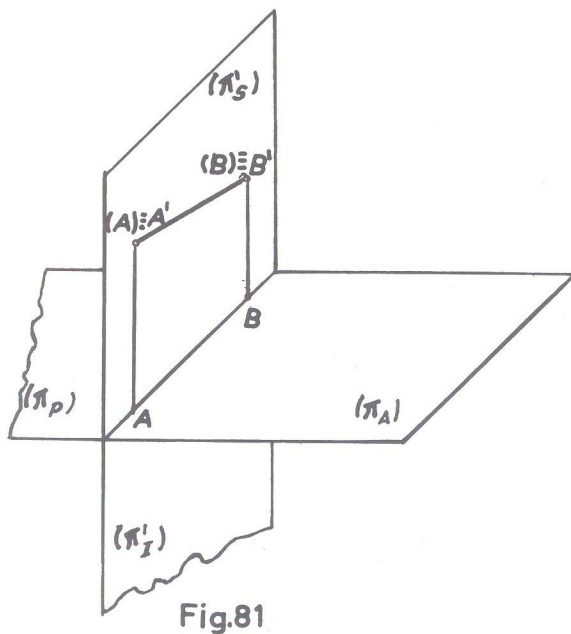
Obs.: Semelhante à da reta vertical com relação aos planos de nomes contrários.

RETA DE PERFIL

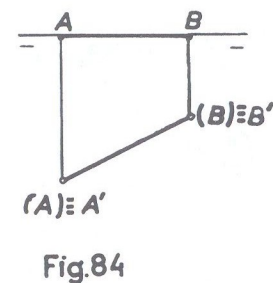
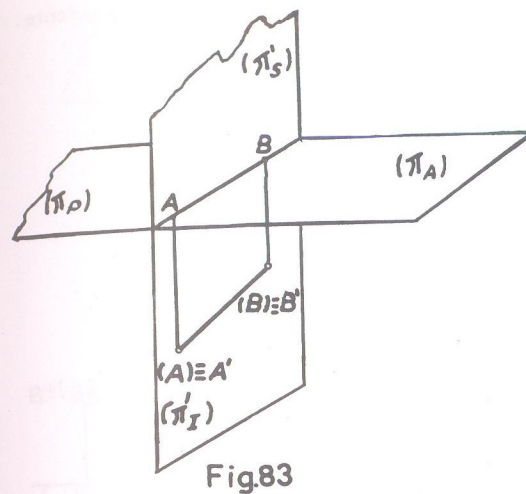
É a reta perpendicular (ou ortogonal) à linha de terra e, por apresentar particularidades, será estudada mais adiante.

Tal como ocorreu quando do estudo do ponto, também a reta pode estar contida toda dentro de qualquer dos semiplanos ou em coincidência com a linha de terra. No primeiro caso, a reta possuirá sempre uma das projeções sobre a linha de terra, e, no segundo, ambas as projeções coincidem com aquela linha.

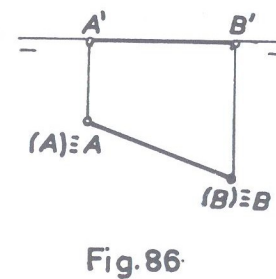
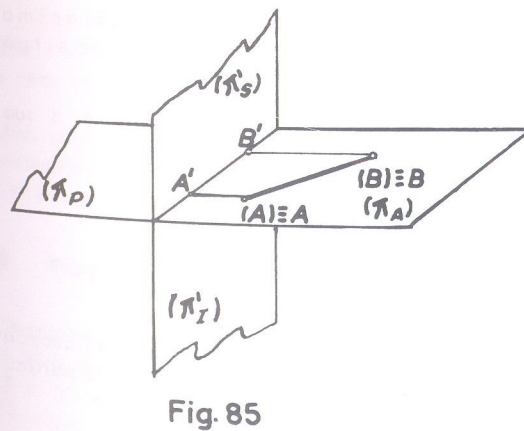
Na fig. 81, vemos uma reta situada no(π'_S)e na fig. 82 a épura correspondente.

Fig.81 Fig.82

Nesse caso, em que a reta coincide com sua própria projeção vertical, apresenta-se em épura com a projeção vertical acima de $\pi\pi'$ e a horizontal sobre essa linha.

Na fig. 83, vemos uma reta situada no(π'_I)e na fig. 84 a épura correspondente.

Fig.83 Fig.84

Caso semelhante ao anterior, apresentando-se a épura, porém, com a projeção vertical abaixo da linha de terra.

Na fig. 85, vemos uma reta situada no(π_A)e na fig. 86 a épura correspondente.

Fig. 85 Fig. 86

Agora a reta coincide com sua própria projeção horizontal e a épura (fig. 86) assemelha-se à da fig. 84, diferindo desta por possuir sobre a linha de terra a projeção vertical e a horizontal abaixo daquela linha.

Na fig. 87 vemos uma reta situada no(π_P)e na fig. 88 a épura correspondente.

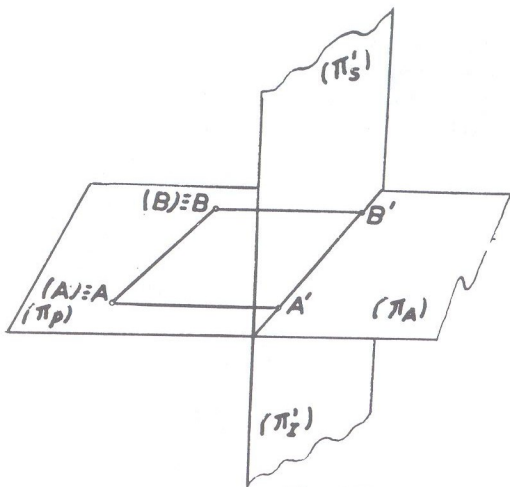



Fig. 87

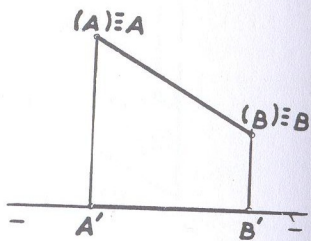



Fig. 88

Caso semelhante ao anterior apresentando-se a épura porém, com, a projeção horizontal acima da linha de terra, permanecendo a projeção vertical em coincidência com essa linha. A épura da fig. 88 se assemelha com a da fig. 82 mas note-se que as projeções estão trocadas, pois enquanto na primeira (fig. 82) a projeção acima da linha de terra é a vertical, na última, (fig. 88), é a horizontal que se situa acima daquela linha.

Quando a reta coincide com a linha de terra $\pi\pi'$, a épura da fig. 89 é a sua representação.

(A)≡A≡A' (B)≡B≡B'

Fig. 89

Nas últimas retas contidas nos planos de projeção só consideramos retas oblíquas ao plano contrário ao que se situa. Elas, porém, podem ocupar qualquer posição particular como nos mostram as figuras 90, 91 e 92, onde respectivamente temos:

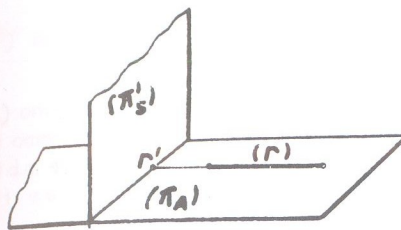



Fig. 90

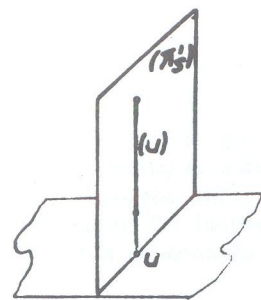



Fig. 91

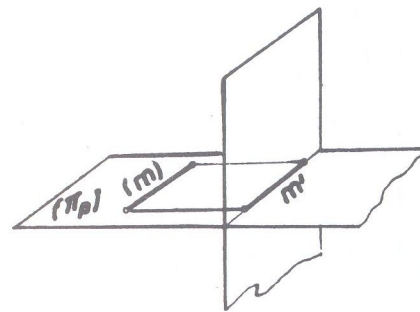



Fig. 92

Fig. 90 ⟶ reta (r) de topo no (π_A)
Fig. 91 ⟶ reta (u) vertical no (π'_S)
Fig. 92 ⟶ reta (m) frontohorizontal no(π_P)

Obs.: O que não se pode considerar, pelo absurdo, é reta de topo dentro de(π') e reta vertical no plano (π).

Uma reta pode ainda se apresentar de inúmeras maneiras em relação aos planos de projeção, isto é, com pontos nos vários diedros. Mas para isso, precisamos estudar "traços de retas", que vem a seguir.

• Traços de retas

Chama-se "traço de uma reta sobre um plano" o ponto em que essa reta fura ou atravessa esse plano. Conclui-se então que quando uma reta for paralela a um plano, não terá traço sobre esse plano. O traço sobre o plano (π') é o "traço vertical" e por convenção representa-se por (V), isto é, a letra V

maiúscula entre parênteses e de modo idêntico o traço horizontal no plano (π) é representado por (H), por serem esses pontos dos respectivos planos.

Seja na fig. 93 a reta (u) e o ponto (V) a interseção da reta (u) no plano (π'). Como todos os pontos de (π') têm afastamento nulo, como já vimos, e como (V) é o único ponto comum à reta (u) e ao plano (π') conclui-se que, para se obter o traço vertical (V) de uma reta, basta determinar o ponto da reta (u) que tenha também afastamento nulo.

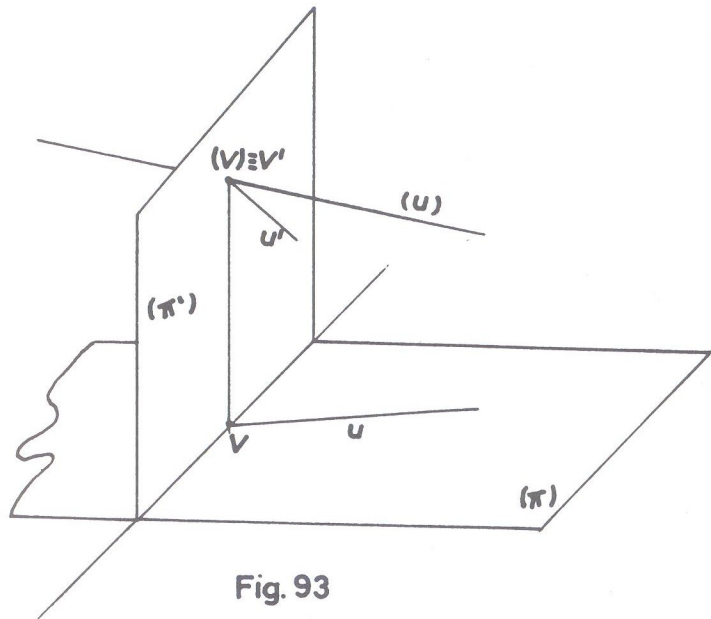



Fig. 93

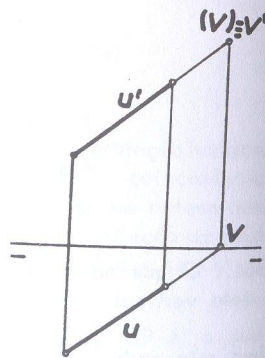



Fig. 94

Em épura (fig. 94), para se achar o traço vertical da reta uu', é suficiente prolongar a projeção de nome contrário (projeção horizontal) até a linha de terra, onde fica determinado o ponto V que é a projeção horizontal do traço V'. De V, uma linha de chamada faz conhecer V' como indica a épura. Este ponto V' que coincide com o ponto objetivo (V) é um ponto da reta (u) e seu afastamento é nulo.

De modo idêntico obtém-se o traço horizontal e as figuras 95 e 96 esclarecem.

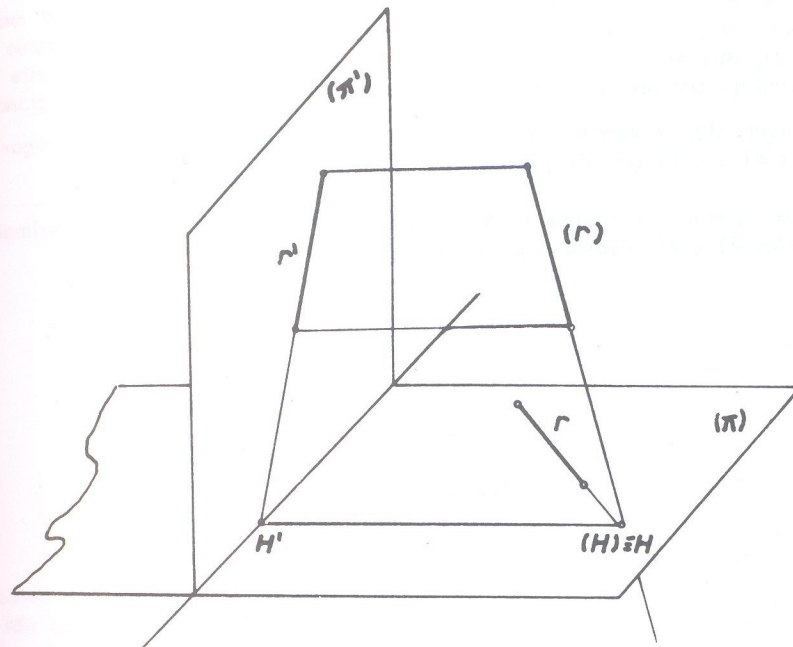



Fig. 95

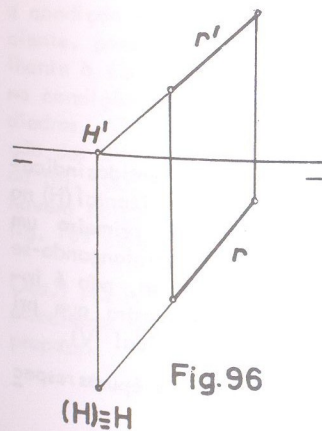



Fig. 96

Na determinação dos traços de uma reta há um princípio imutável, sem exceção alguma: é que a projeção horizontal V do traço vertical (V) e a projeção vertical H' do traço horizontal (H) estão sempre obrigatoriamente sobre a linha de terra, podendo as projeções V' e H se situarem abaixo ou acima da linha de terra conforme a posição da reta, exceto é claro, quando a reta passar por ππ', porque então tudo coincidirá com aquela linha.

Obs.: A regra que acabamos de expor para a obtenção dos traços de uma reta, sofre exceção somente quando a reta é de perfil, como veremos mais adiante.

Conclui-se então que uma reta só possui os dois traços quando é oblíqua aos dois planos (π) e (π') (reta qualquer e reta de perfil). As demais retas, como horizontal, frontal, vertical e de topo, possuem, apenas um traço e finalmente a fronto horizontal, por ser paralela aos dois planos não possui traço nesses planos.

O conhecimento da determinação dos traços de uma reta nos permite traçar retas subordinadas à condição de passarem por diedros dados.

Sejam por exemplo as figuras 97 e 98, de retas no 1º diedro, onde a primeira (r) passa pelos 2º e 4º diedros e a segunda (u) pelo 4º e 3º.

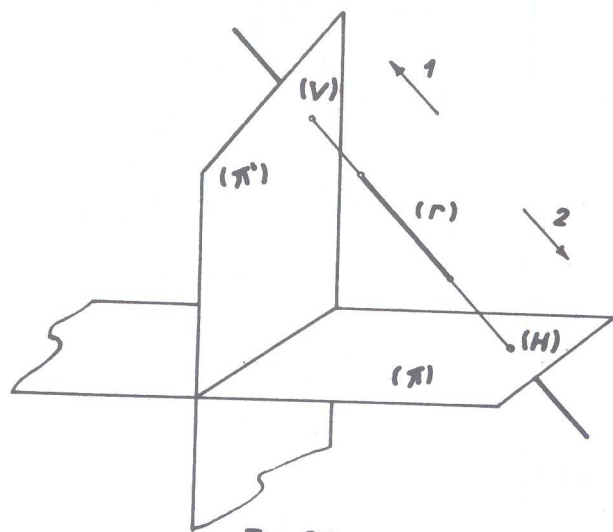



Fig. 97

Vemos na fig. 97 que os traços são obtidos prolongando a reta nos sentidos indicados pelas setas: traço vertical (V) no sentido da seta 1 e traço horizontal (H) no sentido da seta 2. Observa-se ainda que é indiferente determinar-se primeiro um ou outro traço. Na fig. 98 entretanto, ambos os traços são obtidos prolongando-se a reta (u) num único sentido: o da seta 3. E mais: no segundo caso, não é indiferente achar-se primeiro este ou aquele traço, pois a figura nos mostra que primeiro determina-se o traço horizontal (H) para depois obter-se a vertical (V).

Então, atendendo à regra já mencionada, as figuras 99 e 100 são as épuras respectivas.

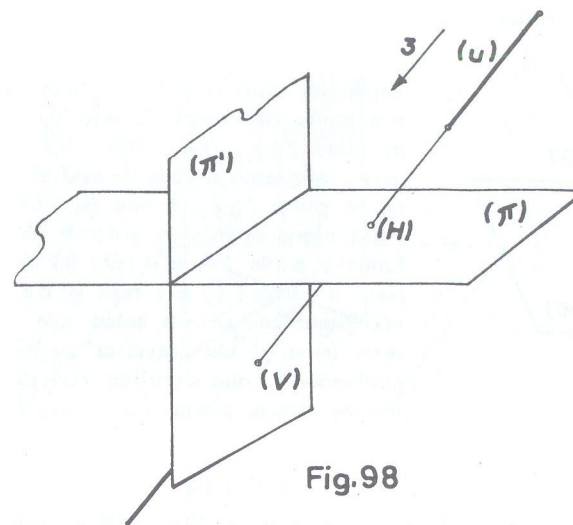



Fig. 98

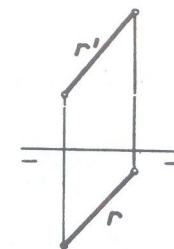



Fig. 99

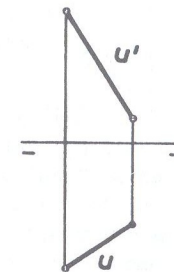
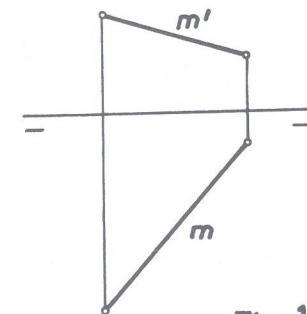



Fig. 100

Verifica-se que na fig. 99 os traços da reta (r) são obtidos prolongando-se as projeções r e r' em sentidos contrários até a linha de terra, enquanto na fig. 100 no mesmo sentido, isto é, ambas para o mesmo lado do operador. Ainda neste segundo caso, a condição apesar de necessária não é suficiente, porque a épura da fig. 101, semelhante à épura da fig. 100 não indica reta na condição exigida de passar pelos 4º e 3º diedros. O que se deve atentar é na posição das projeções, pois enquanto na épura da fig. 100, após a determinação dos traços haverá porções da reta no 4º diedro, na fig. 101 essas porções estarão no 2º diedro.

Fig. 101

Obs.: Na parte prática, de exercícios, explicaremos melhor, atendendo a cada caso proposto.

Posições relativas de duas retas

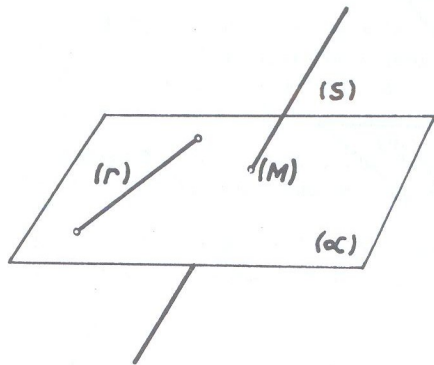



Fig. 102

Sejam as retas (r) e (s), o plano (α) e o ponto (M) comum à reta (s) e ao plano (α). (fig. 102). Vê-se que, enquanto a reta (r) está situada no plano (α), a reta (s) tem nesse plano apenas um ponto (M). Então o ponto (M) e a reta (r) definem o plano (α) e a reta (s) a ele não pertence. Diz-se então que as retas (r) e (s) são "reversas" ou "não coplanares", que significa não estarem no mesmo plano.

Se a reta (s) também pertencer ao mesmo plano (α) da reta (r) (fig. 103) as retas são então "coplanares", isto é, definem um plano, podendo então ser "concorrentes" ou "paralelas". Temos então as retas (r) e (s) que são concorrentes porque têm um ponto comum (M) que se diz "próprio", e as retas (r_1) e (s_1) que são paralelas por não admitirem ponto comum (diz-se, neste caso, que o ponto comum é "impróprio", isto é, não existe).

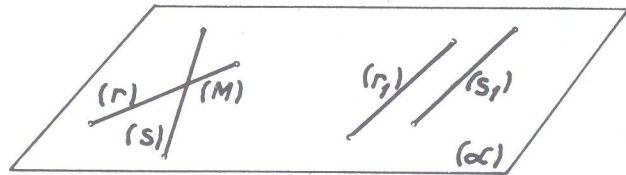



Fig. 103

Retas concorrentes

Duas retas são concorrentes quando :

1º) O ponto de interseção das projeções verticais e o das projeções horizontais estiverem numa mesma linha de chamada.

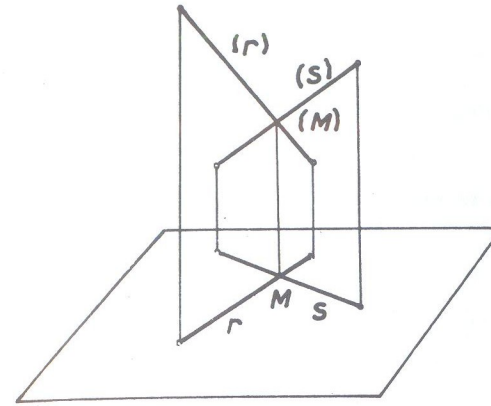
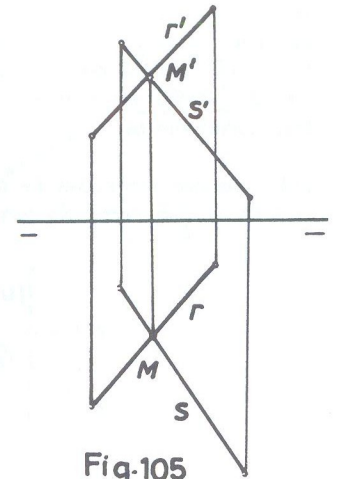



Fig. 104 Fig. 105

A situação no espaço é definida pela fig. 104 e a épura correspondente, pela fig. 105.

2º) Duas projeções de mesmo nome se confundem e as outras duas se cortam.

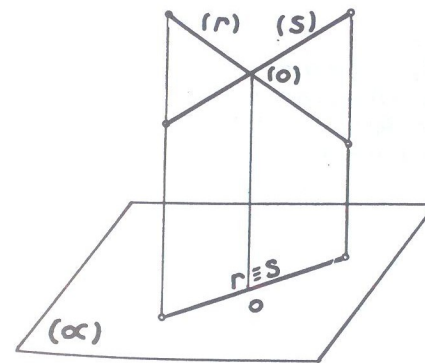
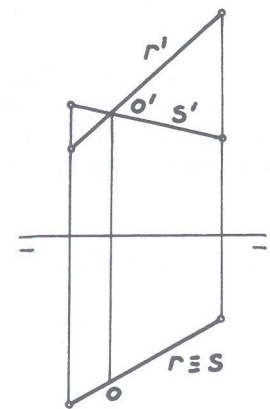



Fig. 106 Fig. 107

A situação no espaço é definida pela fig. 106 e a épura correspondente pela fig. 107. Nesse caso, as duas retas concorrentes admitem um mesmo plano projetante e por isso suas duas projeções de mesmo nome coincidem. Ainda neste caso, a épura (fig. 107) mostra duas projeções horizontais coincidentes e as verticais concorrendo em O'. Podia ser o inverso, isto é, projeções verticais em coincidência e horizontais concorrentes.

3º) Uma das projeções de uma das retas se reduz a um ponto situado sobre a projeção de mesmo nome da outra reta.

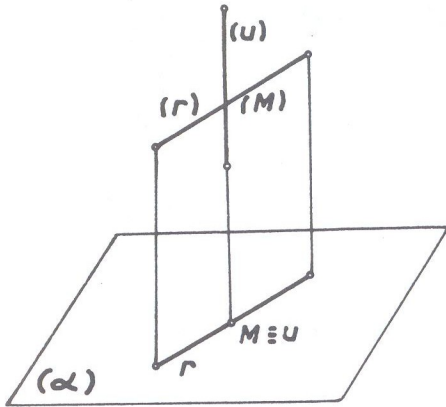



Fig. 108

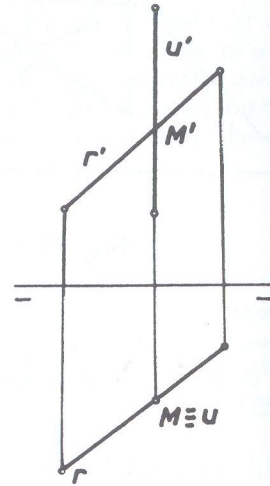



Fig. 109

A situação no espaço é definida pela fig. 108 e a épura correspondente pela fig. 109 No caso, considerou-se uma reta vertical (u) e portanto como projeção puntual a horizontal u; mas poderíamos igualmente considerar a vertical com essa particularidade, e a épura apresentaria em consequência uma reta de topo.

Retas paralelas

Analogamente aos três casos anteriores, duas retas são paralelas quando:

1º) As suas projeções de mesmo nome são paralelas.

(vide figuras 110 e 111 na página seguinte)

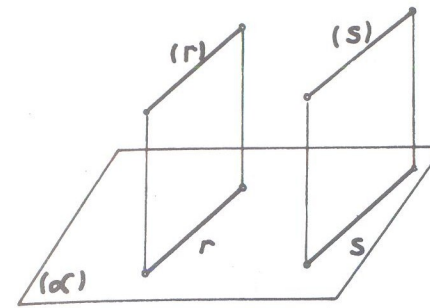
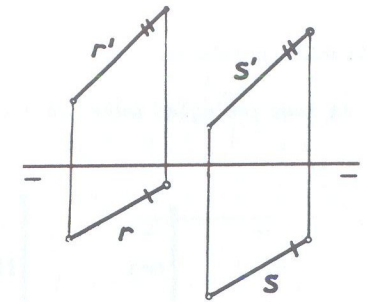



Fig. 110 Fig. 111

A situação no espaço é definida pela fig. 110 e a épura correspondente pela fig. 111.

2º) Duas projeções de mesmo nome se confundem e as outras duas são paralelas. (É o caso das duas retas paralelas admitirem um mesmo plano projetante).

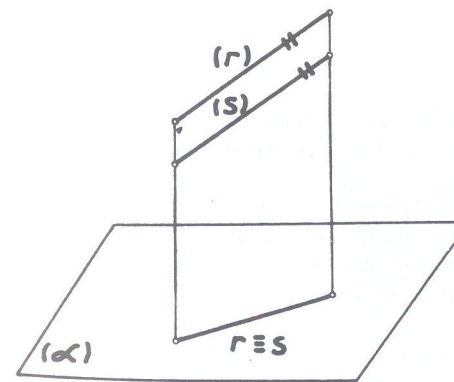
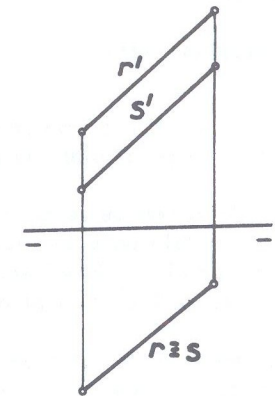



Fig. 112 Fig. 113

A situação no espaço é definida pela fig. 112 e a épura correspondente pela fig. 113. Poderia dar-se o inverso, isto é, as projeções verticais em coincidência e as

horizontais paralelas, o que não altera a condição de paralelismo das duas retas.

3º) As suas projeções sobre um mesmo plano se reduzem, cada uma, a um ponto.

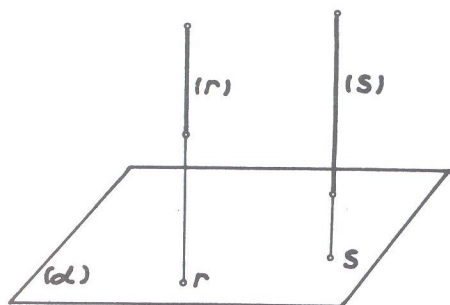
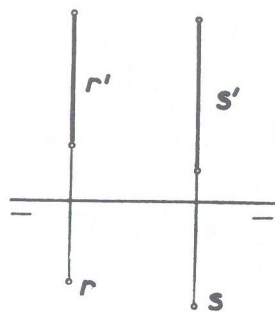



Fig.114 Fig.115

É o caso de duas retas verticais ou de topo que obrigatoriamente são paralelas entre si. A situação no espaço é definida pela fig. 114 e a épura correspondente pela fig. 115 (retas verticais no caso).

● Retas de perfil

Reta de perfil é uma reta oblíqua dos dois planos de projeção numa posição particular: perpendicular (ou ortogonal) à linha de terra.

Quando, do estudo de retas, vimos a reta paralela ao plano horizontal (reta horizontal), paralela ao plano vertical (reta frontal) e paralela aos dois planos (reta frontohorizontal). Vimos depois a reta perpendicular ao plano horizontal (reta vertical) e perpendicular ao plano vertical (reta de topo).

Não foi mencionado retas perpendiculares aos dois planos porque não há retas nessa posição, pois toda reta perpendicular a um plano será obrigatoriamente paralela ao outro, já que os dois planos são perpendiculares. Não existindo então reta perpendicular aos dois planos de projeção, há entretanto reta perpendicular à interseção deles, isto é, perpendicular à linha de terra, que é a reta de perfil.

A fig. 116 nos mostra uma reta de perfil situada num plano(π'_I)que e perpendicular aos dois planos de projeção (plano de perfil). A épura é caracterizada pelas projeções perpendiculares à linha de terra (fig. 117).

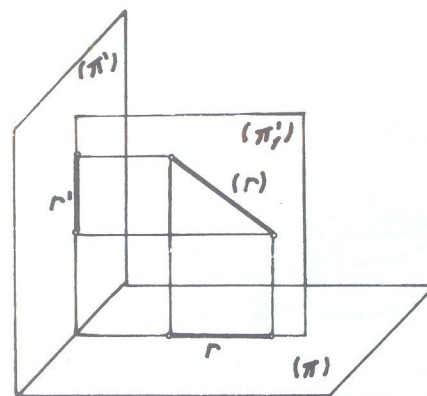
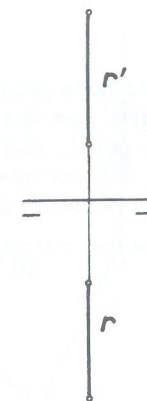



Fig.116 Fig.117

Uma reta de perfil só pode ocupar duas posições em relação aos planos de projeção: ou possui os dois traços distintos (H) e (V) e nesse caso passa por três diedros (ortogonal à linha de terra) ou possui os seus traços coincidentes sobre essa linha e só atravessará dois diedros opostos (perpendicular à linha de terra), como nos mostra a fig. 118.

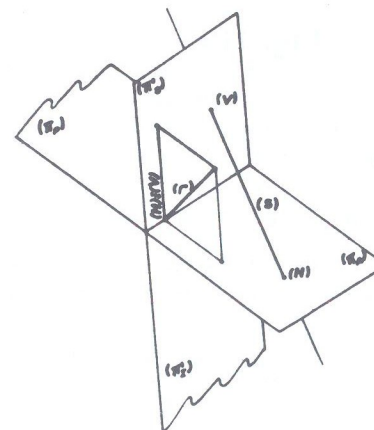



Fig.118

Obs.: A reta pode estar situada num plano de perfil sem que seja necessariamente de perfil. Assim, por exemplo, a fig. 119 nos mostra uma reta vertical num plano de perfil.

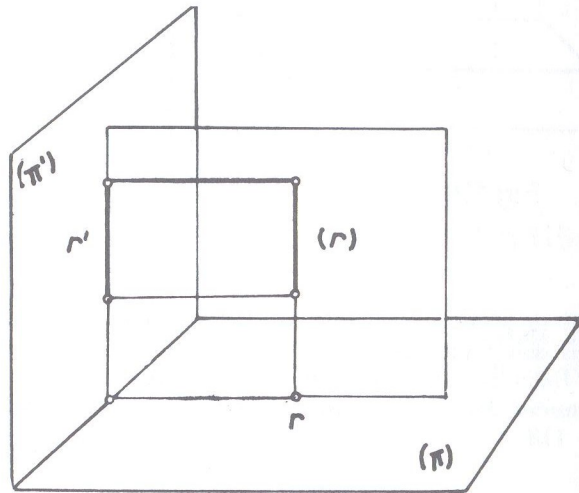



Fig. 119

- **Traços de reta de perfil**

Antes de resolvermos a questão na épura, vamos estudá-la no espaço (fig. 120).

Seja a reta (A)(B) e (H) e (V) os seus traços respectivamente sobre (π) e (π'). Utiliza-se, no estudo da reta de perfil, o rebatimento do plano de perfil que a contém que no caso é o triângulo (H)V(V). Este rebatimento consiste em girá-lo de 90º no sentido contrário aos ponteiros do relógio, até que fique em coincidência com o plano vertical (π'), sendo este giro feito em torno de sua intersecção com o plano (π') , que no caso é (V)V. Adota-se este sentido para que os diedros após o rebatimento se apresentem nas regiões já conhecidas. Com este rebatimento, os pontos (A) e (B) descreverão no espaço arcos de círculos horizontais e vêm colocar-se em (A_1) e (B_1) respectivamente sobre retas traçadas por

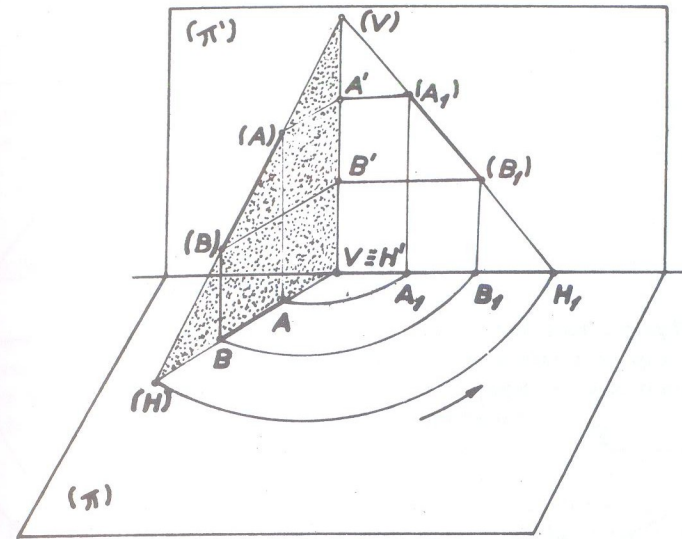



Fig. 120

A' e B' paralelamente à linha de terra. No plano horizontal o ponto A descreve um arco de círculo de raio AV e vem cair em A_1 do mesmo modo que o ponto B vem cair em B_1; desses pontos A_1 e B_1 traçam-se no plano vertical as paralelas a (V)V que determinam as posições (A_1) e (B_1) após o rebatimento.

Vejamos agora a épura (fig. 121).

Seja (A)(B) dada por suas projeções A e A' e B e B'. Opera-se como foi descrito fazendo-se centro em H' ≡ V e descrevendo os raios de círculo AA_1 e BB_1 até situar esses pontos em A_1 e B_1 na linha de terra. (Não é necessário obrigatoriamente traçar os arcos de círculo e seria bastante transportar os afastamentos dos pontos para $H'A_1$ e $H'B_1$ respectivamente). Daí, por perpendiculares à linha de terra teremos os pontos (A_1) e (B_1) e portanto a reta $(A_1)(B_1)$ nos encontros com as paralelas à linha de terra traçadas por A' e B' respectivamente. Teremos em $(A_1)(B_1)$ a verdadeira grandeza da reta dada e um V' ≡ (V) o seu traço vertical. No plano horizontal, o traço é H e para determiná-lo teremos de desfazer o rebatimento (operação inversa do rebatimento e que se chama "alçamento"). Assim, prolongando a reta $(A_1)(B_1)$, teremos em H_1 sobre a linha de terra o traço horizontal rebatido; então, com o mesmo centro em H' ≡ V e raio $H'H_1$ descreve-se, em sentido contrário ao efetuado para o rebatimento (sentido dos ponteiros), o arco H_1H, sendo (H) e traço horizontal.

Obs.: É sempre a projeção horizontal que se rebate e no sentido do contrário dos ponteiros, o que constitui REGRA GERAL.

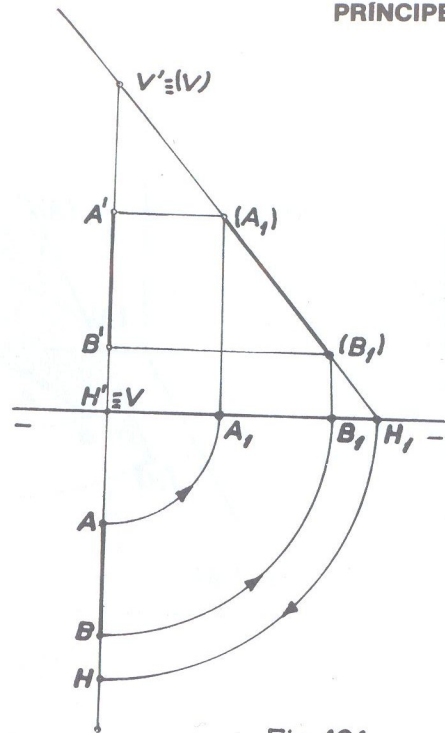
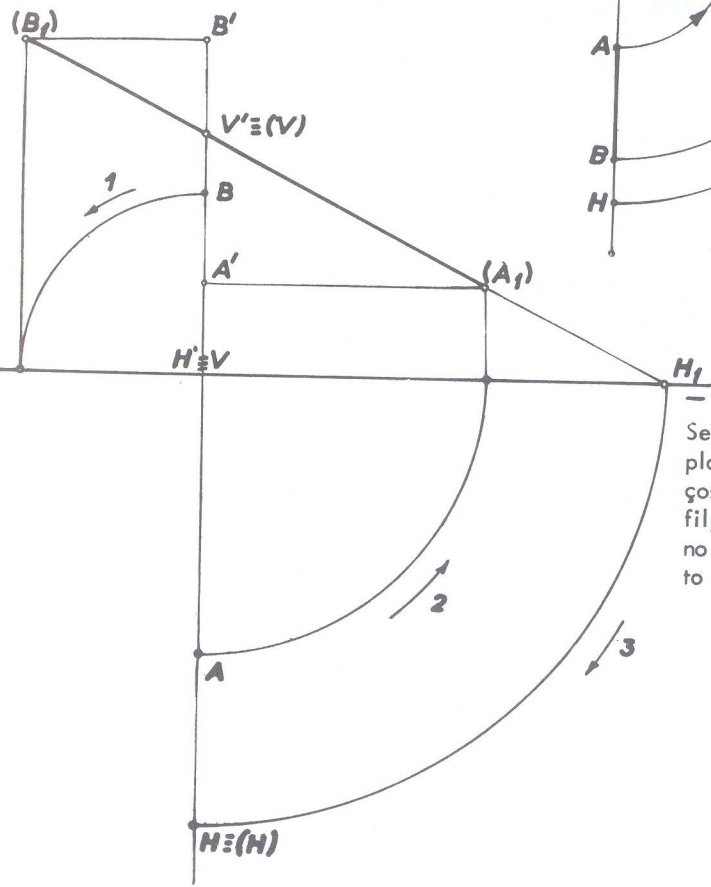



Fig.121

Fig.122

Seja como novo exemplo determinar os traços de uma reta de perfil, com um ponto (A) no 1º diedro e um ponto (B) no 2º (fig.122).

De acordo com a regra já estabelecida, as projeções A e B são giradas no sentido das setas 2 e 1 respectivamente e nos fornecem a verdadeira grandeza $(A_1)(B_1)$ da reta dada (A)(B). Verifica-se que o ponto (A_1) aparece na região que representa o 1º diedro e (B_1) na região do 2º diedro. Tem-se em V' ≡ (V) o traço vertical da reta e em (H) ≡ H o traço horizontal. Sobre a linha de terra, tem-se as projeções dos traços H' ≡ V.

Pertinência de ponto à reta de perfil

Já vimos que um ponto pertence a uma reta quando tem suas projeções sobre as projeções correspondentes da reta, (fig. 68) quando foi esclarecido que tal regra não se aplicava à reta de perfil. Com efeito, o ponto pode ter suas projeções sobre as projeções de mesmo nome da reta e a ela não pertencer.

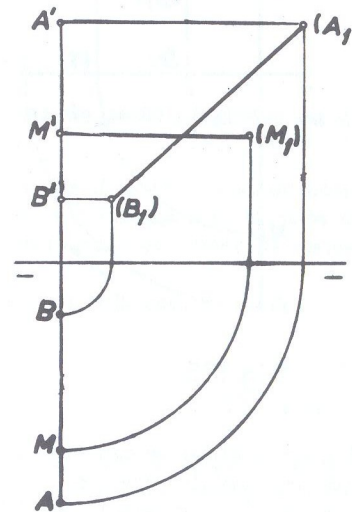



Fig. 123

Na fig. 123 temos uma reta de perfil dada pelas suas projeções e também as projeções M e M' de um ponto (M) sobre as projeções correspondentes da reta. Se a regra fosse verdadeira, o ponto (M) pertenceria à reta (A)(B) e o rebatimento nos mostra que o ponto não pertence à reta.

Então, normalmente, para se saber se um ponto pertence a uma reta de perfil, opera-se o rebatimento como prática normal. Entretanto, sem utilizar rebatimento podemos também verificar se um ponto dado pertence a uma reta de perfil dada. Seja na fig. 124 a reta (A)(B) dada pelas projeções e o ponto (M) também dado pelas projeções.

Se a relação $\frac{BM}{BA} = \frac{B'M'}{B'A'}$ for verificada, o ponto pertence à reta e caso contrário não pertencerá. A citada relação é baseada no teorema:

"A relação de dois vetores tomados sobre uma mesma reta ou sobre duas retas paralelas, é igual à relação de suas projeções cilíndricas". Substituindo então, na mencionada relação, os segmentos pelos valores numéricos, tem-se:

$$\frac{0,5}{1,5} = \frac{1}{3} \quad \therefore \quad 0,5 \times 3 = 1 \times 1,5 \quad \text{ou} \quad 1,5 = 1,5$$

o que demonstra que o ponto pertence à reta. (O rebatimento confirmará a pertinência do ponto à reta).

De forma idêntica, conhecidas as projeções de uma reta de perfil e uma das projeções de um ponto a ela pertinente, podemos determinar a outra projeção.

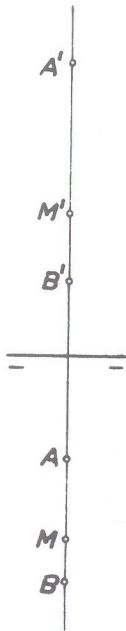



Fig. 124

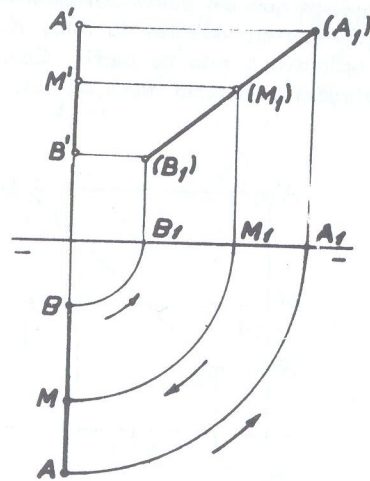



Fig. 125

Seja como exemplo a reta (A)(B) e o ponto (M) do qual só se conhece a cota (fig. 125). Para se achar o afastamento (projeção horizontal), opera-se o rebatimento e determina-se a verdadeira grandeza em $(A_1)(B_1)$; a seguir, por M' (projeção conhecida), traça-se $M'(M_1)$ situando-se (M_1) sobre $(A_1)(B_1)$ por se saber que o ponto é pertinente à reta. Desfazendo-se o rebatimento, obter-se-á a projeção M pedida, que estará sobre AB.

Mas, sem efetuar o rebatimento, podemos também solucionar o problema, pela aplicação da relação já descrita. Assim, se na épura da fig. 126, conhecida uma das projeções de um ponto (projeção vertical C' por exemplo), desejamos obter a projeção horizontal C, empregamos a mencionada relação.

$$\frac{BC}{BA} = \frac{B'C'}{B'A'}$$

onde o termo BC é desconhecido por não se conhecer a projeção C.

Resolvendo vem:

$$BC = \frac{BA \times B'C'}{B'A'}$$

onde, substituindo os segmentos pelos módulos (valores numéricos) correspondentes, vem:

$$BC = \frac{2 \times 0,5}{1} = 1$$

Marca-se então BC = 1 (C sobre AB).

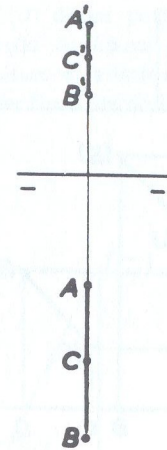



Fig. 126

Retas de perfil paralelas ou concorrentes.

Já vimos que duas retas quando possuem as projeções de mesmo nome paralelas, são paralelas. No caso, porém, de retas de perfil, a condição de paralelismo das projeções correspondentes apesar de necessária não é suficiente.

Consideremos dois casos:

1º) Retas situadas no mesmo plano de perfil;

2º) Retas situadas em planos de perfil distintos.

No 1º caso, quando então as retas terão a mesma abscissa, elas poderão ser paralelas ou concorrentes (nunca reversas, como é óbvio, pois estão no mesmo plano). No 2º caso, podem ser paralelas ou reversas e nunca concorrentes, porque, situadas cada uma, em planos paralelos entre si, todas as retas de qualquer deles são paralelas ao outro; nesse caso, as abscissas das retas são diferentes. Duas retas de perfil quando possuem abscissas iguais, estando portanto no mesmo plano de perfil, terão suas projeções de mesmo nome superpostas; quando de abscissas diferentes, terão projeções de mesmo nome paralelas. (Fig. 127 e 129 e suas respectivas épuras, fig. 128 e 130).

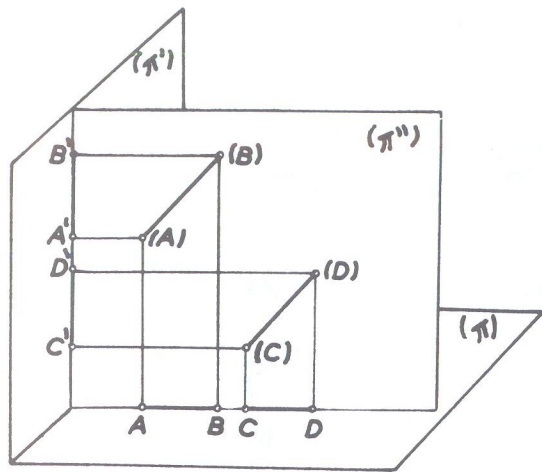



Fig.127

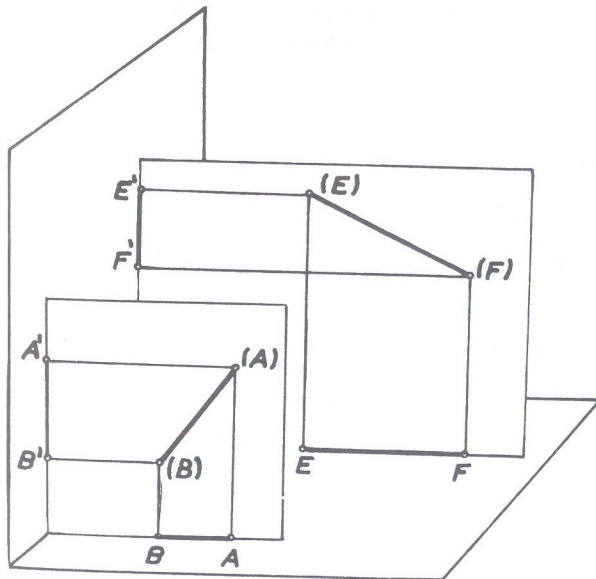



Fig.128

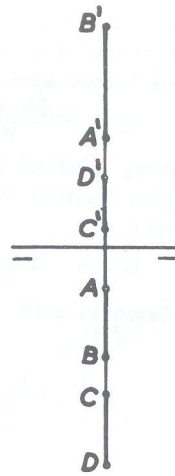



Fig.129

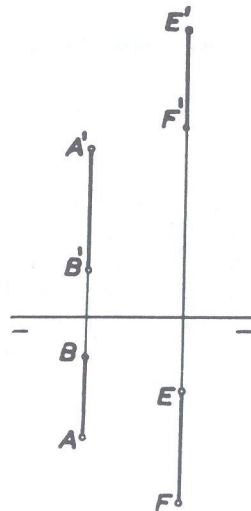



Fig.130

Seja agora verificar se duas retas de perfil (A)(B) e (C)(D) dadas pelas suas projeções, são ou não paralelas, (fig. 131). A simples inspeção da épura nos mostra que se trata de retas em planos distintos (por serem de abscissas diferentes). Operando-se o rebatimento, temos em $(A_1)(B_1)$ e $(C_1)(D_1)$ as respectivas verdadeiras grandezas mostrando que as mesmas não são paralelas.

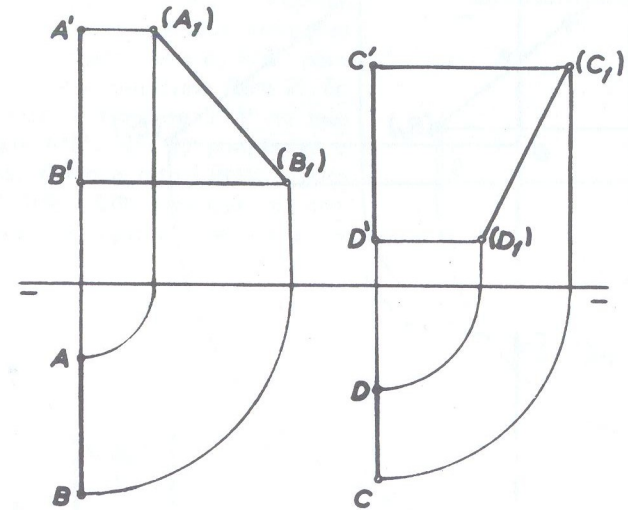



Fig. 131

Então, para se traçar por um ponto uma reta paralela a uma reta de perfil dada, procede-se do seguinte modo (fig. 132):

Rebate-se o plano que contém a reta e o ponto e obtém-se $(A_1)(B_1)$ e (C_1). Por (C_1) traça-se uma reta $(C_1)(D_1)$ paralela a $(A_1)(B_1)$ e cujas projeções são CD e C'D' que solucionam o problema. O ponto (D_1) é marcado arbitrariamente (desde que no problema proposto não tenha que satisfazer a outra qualquer condição, como no caso) e após o alçamento, obtém-se a projeção D.

Obs.: Verifica-se na fig. 132, que as projeções de mesmo nome da reta, são da mesma grandeza e do mesmo sentido, isto é, A'B' = C'D' e AB = CD e dispostas ambas no mesmo sentido da seta Δ' Δ (delta linha — delta), quer dizer, a leitura A' para B' e A para B do mesmo modo que C' para D' e C para D. Então essas projeções são vetores equipolentes, mediante o que, dada uma reta de perfil pelas suas projeções e um ponto dado também pelas suas projeções, não é necessário ope

rar-se qualquer rebatimento, sendo suficiente a construção desses vetores, como nos indica a épura da fig. 133 onde marcamos M'N' = A'B' e MN = AB e do mesmo sentido, ou seja, no sentido da seta.

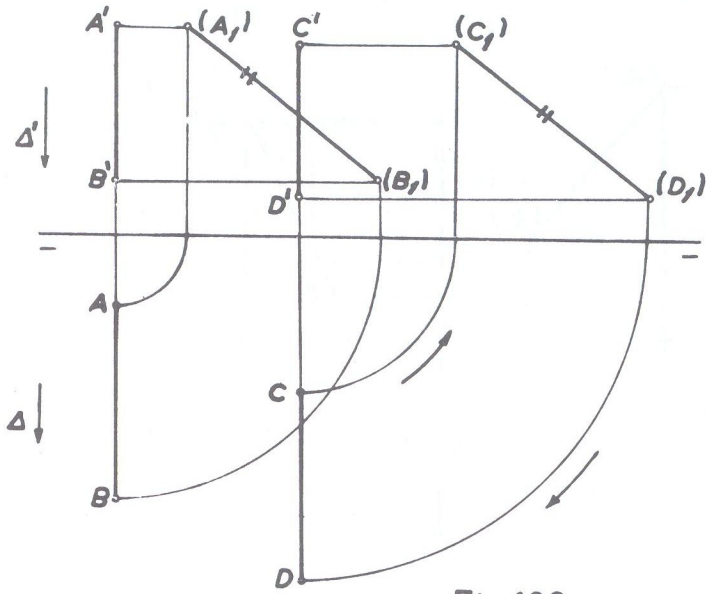



Fig. 132

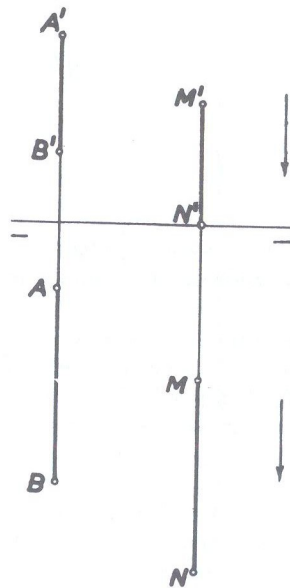



Fig. 133

Fig. 134

Seja agora a épura de fig. 134. Dado um ponto (J), traçar por ele uma reta paralela a uma reta de perfil (A)(B). Veja-se que neste caso a reta tem suas projeções lidas em sentido oposto, isto é, A'B' para baixo (seta 1) e AB para cima (seta 2). Então, da projeção J' traça-se J'M' no mesmo sentido que A'B', isto é, para baixo e JM para cima. Então a reta (J)(M) é paralela à reta (A)(B). (Observar que os comprimentos devem ser iguais: J'M' = A'B' e JM = AB).

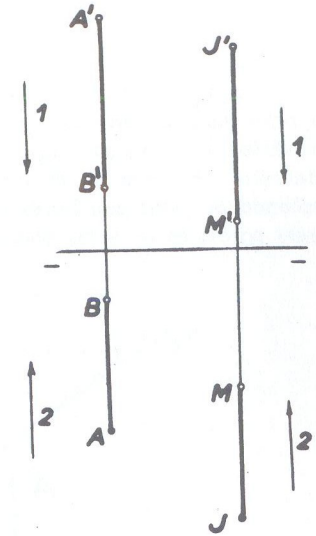
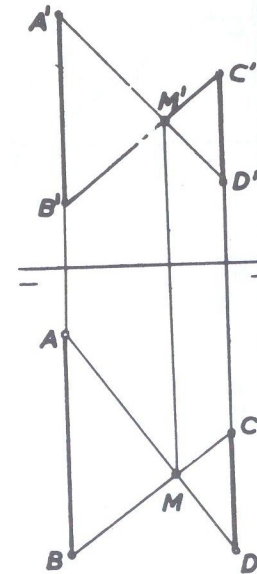



Fig. 135

Há ainda outro critério para verificação do paralelismo de duas retas de perfil, quando situadas em planos distintos. Basta que se unam em cruz os pontos extremos das projeções como indica a fig. 135, determinando-se duas retas quaisquer auxiliares, as quais, se forem concorrentes, as

de perfil serão paralelas e se não forem concorrentes, as de perfil não serão paralelas e sim reversas. Em outras palavras, se o ponto de cruzamento das projeções verticais M' e o de cruzamento das projeções horizontais M estiverem numa mesma linha de projeção, as retas dadas são paralelas; no caso contrário como na fig. 136, as retas dadas são reversas, porque M e M' não se situam na mesma perpendicular à linha de terra. A linha de projeção que parte de M' e que deveria cair em M, está interceptando as retas auxiliares na projeção horizontal, em 1 e 2, o que significa não serem paralelas as retas dadas.

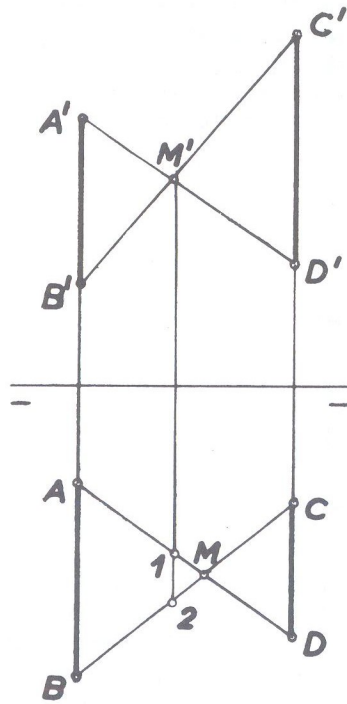



Fig. 136

Sejam ainda as retas (A)(B) e (C)(D), ambas com a mesma abscissa porém uma, (A)(B), com um ponto no 1º diedro e outro no 3º e (C)(D) com um ponto no 4º e outro no 1º diedro, que desejamos saber se são paralelas ou concorrentes (fig. 137). Operando-se o rebatimento, verifica-se que $(A_1)(B_1)$ e $(C_1)(D_1)$ são paralelas, o que significa que as retas (A)(B) e (C)(D) também são.

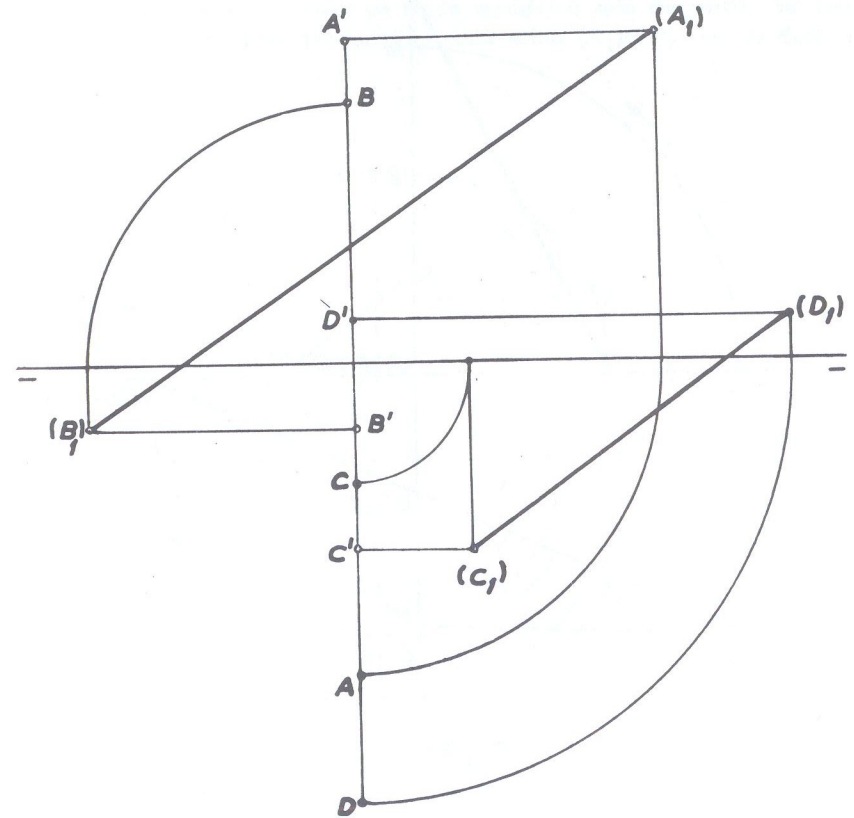



Fig. 137

Vejamos outro exemplo mais: as retas (A)(B) e (C)(D) que possuem: ponto (A) no plano (π'_S); ponto (B) no plano(π_P); ponto (C) no plano (π'_I) e ponto (D) no plano (π_A)S. Verificar se tais retas são paralelas ou concorrentes e neste último caso, determinar o ponto de interseção (fig. 138)

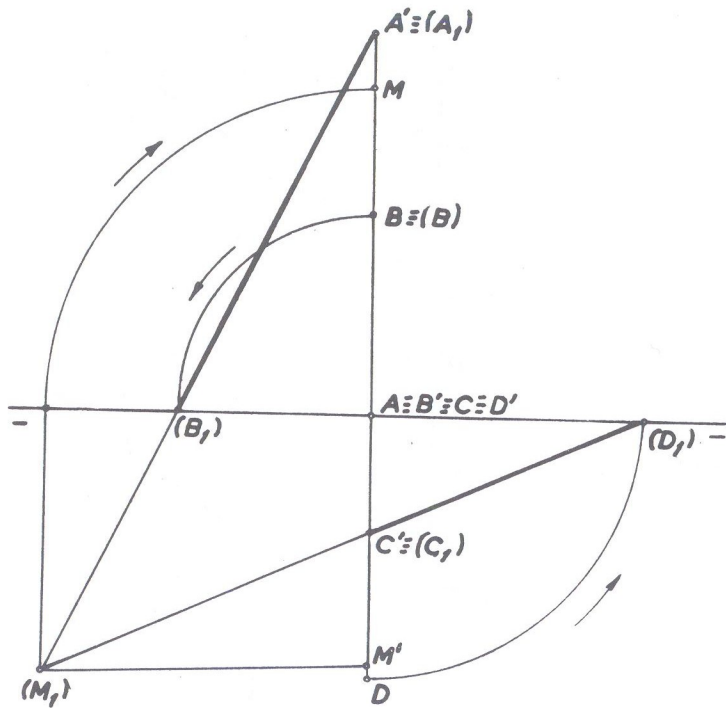



Fig. 138

Operando-se o rebatimento do plano de perfil que contém as retas (A)(B) e (C)(D), obtemos as retas $(A_1)(B_1)$ e $(C_1)(D_1)$ que concorrem em (M_1) no 3º diedro e cujas projeções M e M' solucionam.

CONCORRÊNCIA DE RETAS QUANDO UMA É DE PERFIL

Temos duas maneiras de verificação:

- pelo rebatimento;
- pelo emprego de retas auxiliares.

Sejam, na fig. 139, as retas (A)(B) de perfil e (C)(D) qualquer. Rebatendo-se a reta de perfil, a verdadeira grandeza é $(A_1)(B_1)$. A seguir verifica-se se o ponto (M) que pertence à reta qualquer, pertence também à reta de perfil. Se isso ocorrer — como ocorre no caso porque (M_1) está sobre $(A_1)(B_1)$, — as duas retas são concorrentes.

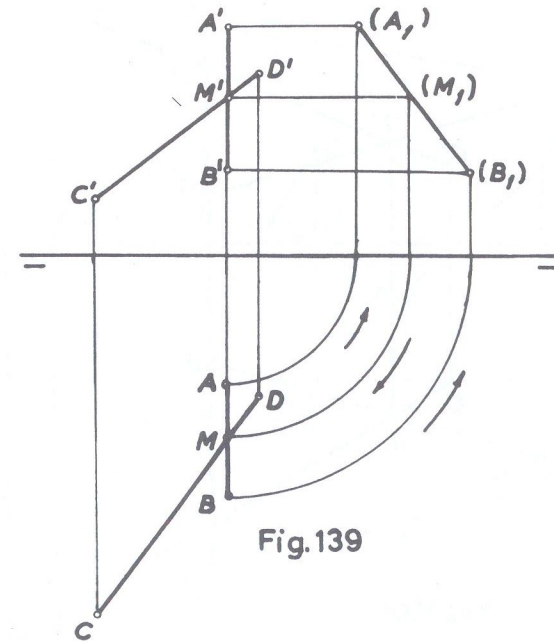



Fig. 139

No outro caso, pelo emprego de retas auxiliares procede-se do seguinte modo:

Sejam (A)(B) de perfil e (C)(D) qualquer que em épura se cruzam em (O). Se o ponto (O) que pertence à reta (C)(D) pertencer também à reta de perfil, será então comum às duas retas e elas serão concorrentes. Tomam-se dois pontos quaisquer 1' e 2' sobre a projeção vertical C'D' da reta qualquer que fornecem 1 e 2 sobre a horizontal correspondente. Esses pontos são unidos a pontos correspondentes da reta de perfil formando duas retas auxiliares, de projeções 1'B' e 2'A' no plano vertical e 1B e 2A no plano horizontal. Verifica-se no caso que o ponto M' (de concorrência das duas projeções verticais 1'B' e 2'A') e o ponto M (de concorrência das duas projeções horizontais 1B e 2A) estão numa mesma perpendicular à linha de terra, isto é, numa mesma linha de projeção, o que configura a concorrência das duas retas dadas.

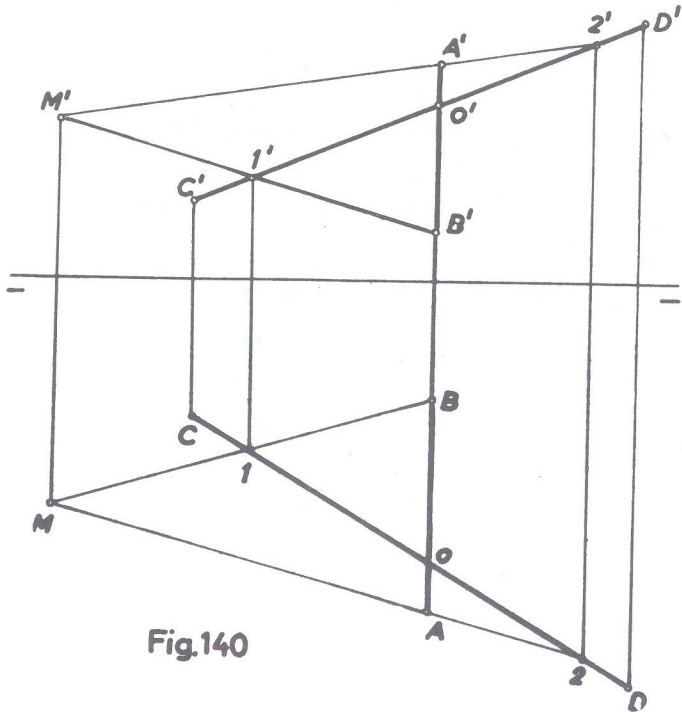



Fig.140

A seguir a parte prática do Capítulo II com numerosos exercícios.

Exercícios referentes ao capítulo II

16 • Dar a épura das retas (A)(B) e (C)(D) e defini-las quanto à posição.

(A) [1 ; 2 ; 1]

(B) [3 ; 1 ; 3]

(C) [-3 ; -2 ; -2]

(D) [0 ; -2 ; 3]

SOLUÇÃO: (fig. 141)

A reta (A)(B) é qualquer no 1º diedro.
A reta (C)(D) é uma frontal (projeção horizontal paralela e projeção vertical oblíqua à linha de terra). O ponto (C) está no 3º diedro e o ponto (D) no 2º diedro.

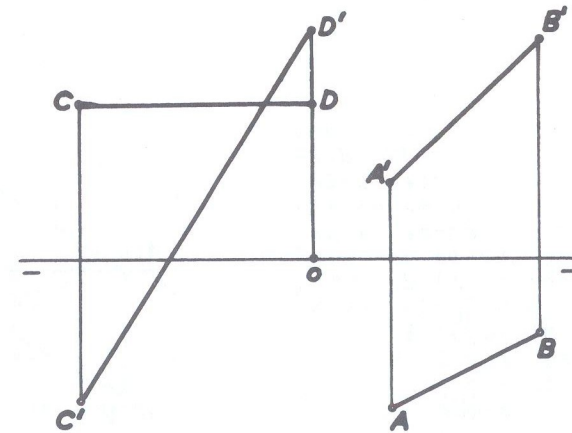



Fig. 141

17 • Traçar uma horizontal distante 2 cm do plano (π) contendo um ponto (A) no bissetor do 1º diedro e outro ponto (B) no (π'_S).

SOLUÇÃO: (fig. 142)

Se a reta é horizontal e tem que estar distante 2 cm do plano horizontal é porque as cotas de qualquer de seus pontos são iguais a 2 cm. Então $A'A_o$ = BB'= 2 cm. Se um ponto está contido no bissetor é porque afastamento e cota são iguais, marcando-se então $A_oA = A_oA'$, ficando o ponto (A) no bissetor do 1º diedro. Se um outro ponto (B) está contido no semiplano vertical superior, sua projeção horizontal está sobre a linha de terra. A reta (A)(B) é solução.

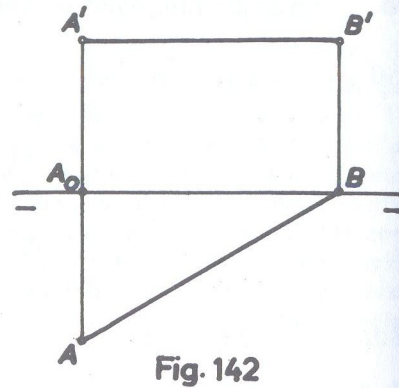



Fig. 142

18 • Traçar a épura de uma reta (r) com um ponto no plano (π'_I) e outro no 3º diedro, e determinar os seus traços.

SOLUÇÃO: (fig. 143)

Traça-se um ponto (A) no plano (π'_I) e outro (B) no 3º diedro tudo arbitrariamente; unindo-se as projeções de mesmo nome desses pontos, têm-se as projeções da reta. Quanto aos traços, sendo o ponto (A) do (π'_I), será ele mesmo o próprio traço vertical cuja projeção horizontal V estará sobre a linha de terra. Para o traço horizontal é suficiente prolongar a projeção vertical r' da reta até a linha de terra, onde se tem H' de onde, uma linha de chamada nos dará, na interseção com o prolongamento da projeção horizontal r da reta, o traço horizontal (H) em coincidência com sua projeção horizontal H.

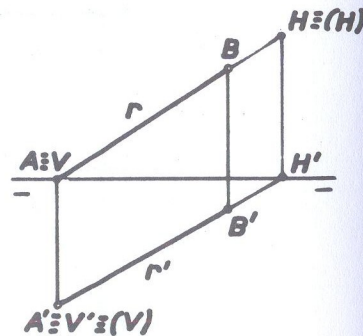



Fig.143

19 • Dada a reta (A)(B) pede-se:

a) sua épura;
b) seus traços;
c) os diedros que ela atravessa;
d) a sua posição no espaço.

(A) [0 ; -2 ; -1] (B) [4 ; 2 ; 2,5]

SOLUÇÃO: (fig. 144 e 145)

a) Locados os pontos, têm-se em A'B' e AB a épura pedida.
b) de acordo com a regra já descrita, têm-se em V' e H os traços da reta e suas respectivas projeções.
c) verifica-se na épura que a reta de projeções AB e A'B' possue:
- *o segmento de projeções BV e B'V' no 1º diedro;*
- *o segmento de projeções VH e V'H' (segmento entre os traços) no 2º diedro;*
- *o segmento de projeções AH e A'H' no 3º diedro.*

d) em consequência do item anterior, a fig. 145 mostra a situação da reta no espaço.

Fig.144 Fig. 145

20 • Um ponto (A) está situado no 2º bissetor. Pede-se traçar uma reta (B)(C) que contenha o ponto (A).

(A) [3 ; 1,5 ; ?]
(B) [-0,5 ; 3 ; 2]
(C) [5 ; ? ; ?]

SOLUÇÃO: (fig. 146)

Do ponto (A) só é conhecido o afastamento; mas como está no bissetor, a cota evidentemente será a mesma e não pode ser marcada para cima da linha de terra porque então o ponto se situaria no 1º diedro e por conseguinte não estaria no 2º bissetor como é dado no problema. Se a reta (B)(C) tem que conter o ponto (A), é suficiente unir as projeções do ponto (B) às do ponto (A) prolongando-as até o encontro da linha de chamada de abscissa igual a 5 cm, onde teremos as projeções C e C'. A reta de projeções BC e B'C' é a solução.

Fig.146

21 • Traçar a épura de uma reta qualquer (A)(B), com o ponto (A) no plano (π_A) e o ponto (B) no plano (π'_S), e passando por um ponto (C).

(C) [2 ; 1 ; 1]

SOLUÇÃO: (fig. 147)

Loca-se o ponto (C) de acordo com as coordenadas dadas. Toma-se arbitrariamente o ponto (A) situado no (π_A); unindo-se as projeções AC e prolongando-se até a linha de terra, teremos aí a projeção horizontal B, de onde levanta-se a linha de chamada BB' situando-se B' na interseção com o prolongamento A'C'.

Fig.147

22 • Traçar as épuras das seguintes retas:

a) de uma vertical distante 2 cm do plano(π')e com um ponto no (π_A);
b) de uma frontohorizontal mais perto do plano(π')do que do plano (π).

SOLUÇÃO: (fig. 148)

a) a reta (A)(B) é vertical e possui o ponto (B) no plano (π_A). Está distante 2 cm do plano (π') porque o seu afastamento está a essa distância da linha de terra. A projeção vertical A' é tomada arbitrariamente.

b) Se a reta está mais perto de (π') do que do plano (π) é porque seu afastamento é menor que sua cota. A reta (r) soluciona.

Fig. 148

23 • Usando uma só linha de terra, traçar as épuras das seguintes retas no 1º diedro:

a) de perfil, toda no (β_I) e possuindo um ponto na linha de terra;
b) de topo, com um ponto no (π'_S) e outro no (β_I);
c) qualquer, com um ponto no (π'_S) distante 1,5 cm de (π) e outro no (π_A) distante 2 cm de (π'_S);
d) de uma horizontal de cota nula.

SOLUÇÃO: (fig. 149)

a) marca-se um ponto (A) no bissetor (afastamento e cota iguais) e um ponto (B) sobre a linha de terra. A reta (A)(B) é de perfil e soluciona.
b) marca-se um ponto (C) situado no plano (π'_S) e um ponto (D) no (β_I). A reta (C)(D) de projeções CD e C'D' soluciona.
c) marca-se um ponto (E) situado em (π'_S) com a cota 1,5 cm que é a distância dele ao plano horizontal (π) e outro ponto (F) situado no (π_A) com o afastamento dado de 2 cm. A reta (E)(F) é a solução.
d) se a cota é nula, a horizontal pedida está no plano (π_A) e portanto sua projeção vertical coincide com a linha de terra. A reta (M)(N) é a solução:

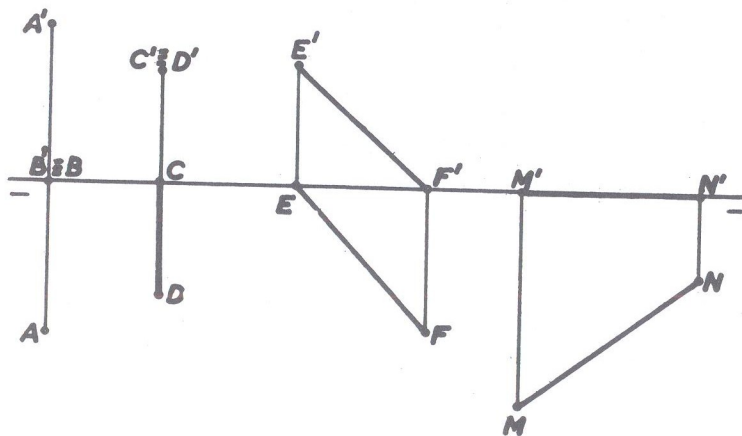



Fig.149

24 • Traçar a épura de uma reta situada no 1º diedro, que atravesse os 2º e 4º diedros.

SOLUÇÃO: (fig. 150 e 151)

No primeiro exercício desse tipo, estudaremos o raciocínio a seguir e traçando no espaço (fig. 150) a posição da reta. Observamos que a reta atravessará o plano horizontal (π_A) para passar ao 4º diedro, prolongando-a no sentido (A)(B), isto é, de (A) para (B); atravessará o plano vertical (π'_S) para passar para o 2º diedro, prolongando-a no sentido (B)(A), ou seja, de (B) para (A).
Em épura (fig. 151), basta que a reta tenha suas projeções de tal forma em relação a linha de terra, que os traços sejam determinados em sentidos contrários, isto é, prolongando-se a projeção vertical A'B' no sentido de A' para B' e a projeção horizontal de B para A. Verifica-se, comparando-se as duas figuras, que a reta (A)(B) atravessa o plano vertical no sentido (B)(A) passando para o 2º diedro após o seu traço vertical (V) e o plano horizontal no sentido (A)(B) passando para o 4º diedro após o seu traço horizontal (H).

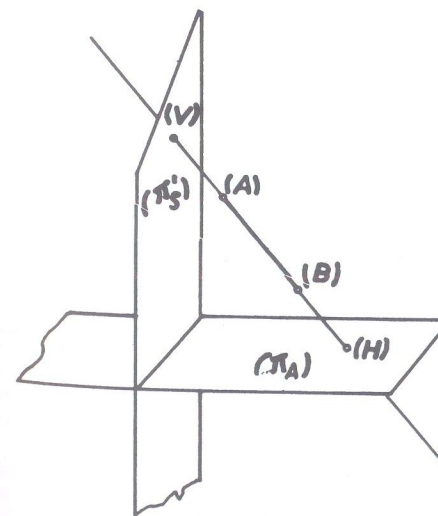



Fig.150

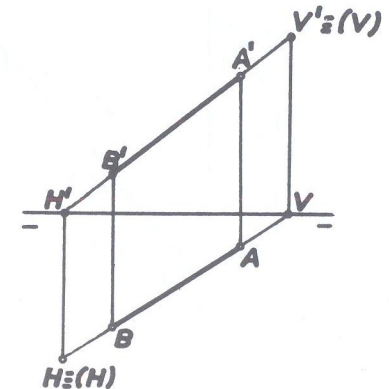



Fig.151

25 • Traçar a épura de uma reta situada no 1º diedro que atravesse o 4º e 3º diedros.

SOLUÇÃO: (fig. 152 e 153)

No espaço, a reta está na posição indicada pela fig. 152. Nesse caso, observa-se que a reta atravessa os dois planos - vertical e horizontal - no mesmo sentido, ou seja, sentido de (A) para (B) e ainda que, para passar para o 4º diedro, ela atravessará primeiro o plano horizontal (π_A) para depois furar o plano vertical (π'_I) a fim de passar para o 3º diedro. Então a épura (fig. 153) deverá estar de tal modo, que os traços sejam determinados, prolongando-se as projeções da reta no mesmo sentido, isto é, A' para B' e também A para B.
Se acharmos os traços da reta da fig. 153 se constatará que ela satisfaz ao pedido.

Obs: Na fig. 153 as duas projeções da reta serão prolongadas para a esquerda da épura para a obtenção dos traços. Isso porém não é regra, porque pode-se também prolongar para a direita, como vemos na figura 154, onde a reta (r) também satisfaz ao mesmo problema e entretanto suas projeções serão prolongadas para a direita da épura. Isso portanto, não importa, porque o necessário é que as projeções da reta satisfaçam à dupla condição:
1º) traços obtidos prolongando-se as projeções no mesmo sentido;
2º) projeção vertical encontrando a linha de terra antes da projeção horizontal.

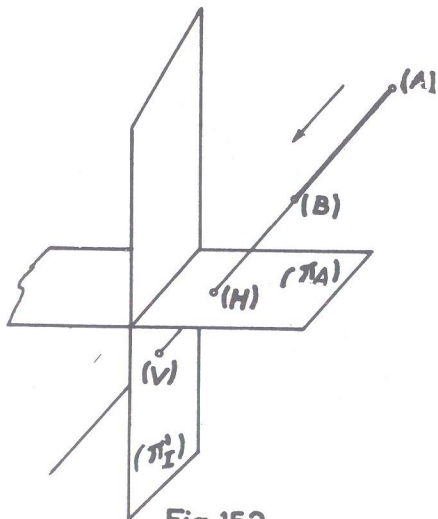
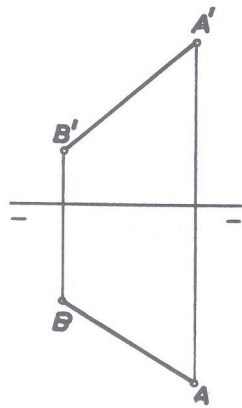
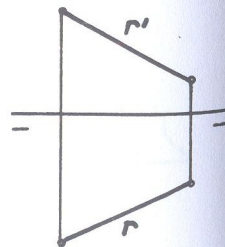



Fig. 152 Fig. 153 Fig. 154

26 • Traçar a épura de uma reta no 3º diedro, atravessando o 4º e 1º diedros.

SOLUÇÃO: (fig. 155 e 156)

A reta aparece no espaço conforme a fig. 155, onde se verifica que seus traços serão obtidos prolongando-a num mesmo sentido. Logo, a épura (fig. 156) deve satisfazer à primeira condição da Obs. anterior.
Quanto à segunda parte entretanto, há uma diferença em relação ao exercício anterior, pois agora a reta fura primeiro o plano vertical passando para o 4º diedro e atravessa depois o plano horizontal para passar para o 1º diedro. Nesse caso então, o traço que se obtem primeiro é o vertical, e daí a épura (fig. 156) assinalar que é a projeção horizontal que deve encontrar primeiro a linha de terra.

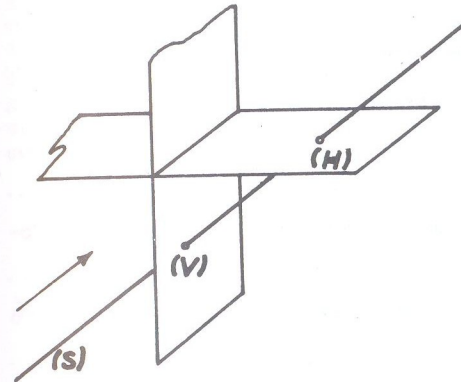
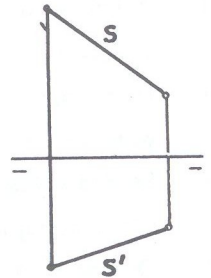



Fig. 155 Fig. 156

27 • Traçar a épura de uma reta no 4º diedro, atravessando o 1º e 3º.

SOLUÇÃO: (fig. 157)

Traçando-se a posição da reta no espaço, verifica-se que ela fura os dois planos de projeção em sentidos opostos. Em face ao que já foi exposto, não haverá a mínima dificuldade no traçado da épura (fig. 157), cujos traços, se determinados, confirmarão.

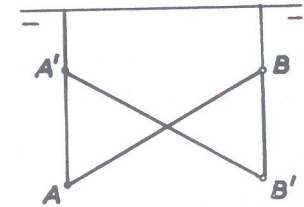



Fig. 157

28 • Preencha as lacunas :

1) A projeção de uma reta sobre um plano só deixa de ser uma reta quando ...
....
.... e neste caso a projeção será ....
2) Um ponto pertence a uma reta quando ....
.... exceto quando a reta .....
....
3) Reta frontal é ....
....
4) A reta cujos traços coincidem no mesmo ponto da linha de terra é ....
....
5) Retas coplanares são as que ....
podendo ser ....
6) Se duas retas de perfil possuem abscissas diferentes elas serão, uma em relação a outra, ... ou ....
7) Quando duas retas possuem as projeções de mesmo nome reduzidas ambas a um ponto, elas são ....
Exemplificar : Retas .... e ....
8) Quando uma reta é paralela a um plano, ela se projeta nesse plano em ....
....
9) Uma reta que possua afastamento e cota constantes chama-se ....
....
10) Quando as duas projeções de uma reta se encontram em um ponto, diz - se que o ponto pertence ao ....

Obs.: A solução deste exercício está no fim deste capítulo, após a solução do exercício nº 52.

29 • Por um ponto (A) [2 ; 2 ; 2] traçar uma reta (A)(B) paralela a uma reta dada (C)(D).

(B) [0 ; ? ; ?]
(C) [-1 ; -1 ; 3]
(D) [3 ; 0 ; -1]

SOLUÇÃO: (fig. 158)

Locados os dados, observa-se que a reta (C)(D) possui um ponto (C) no 2º diedro e ponto (D) no plano (π'_I). É suficiente pois, traçar por A' e por A, respectivamente, as projeções A'B' e AB, paralelas às projeções de mesmo nome da reta (C)(D). O ponto (B) terá suas projeções na linha de chamada que passa pela origem das coordenadas, por ser a abscissa desse ponto igual a zero. A épura da fig. 158 é a solução.

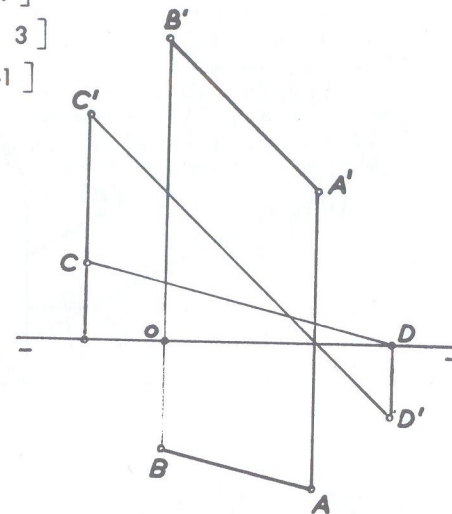



Fig.158

30 • Por um ponto (A) traçar uma reta paralela à reta (B)(C) dada.

(A) [2,5 ; 1,5 ; 1,5]
(B) [0 ; -1,5 ; 3]
(C) [2,5 ; 0 ; 0]

SOLUÇÃO: (fig. 159)

Locados o ponto e a reta dados, não haverá dificuldade nenhuma em se traçar a reta (r), sendo r' paralela a B'C' e r paralela a BC.

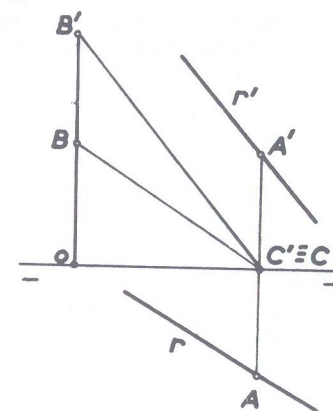



Fig. 159

31 • Traçar a épura de uma reta (A)(B) que no espaço tem a posição indicada na fig. 160, sabendo-se que o ponto (A) pertence ao plano (β_P)

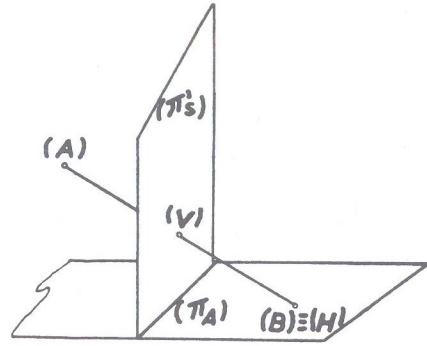



Fig.160

SOLUÇÃO: (fig. 161)

É dada a fig. 160, onde a reta (A)(B) tem o ponto (A) no (β_P) e o ponto (B) no (π_A), ponto esse que em consequência é o seu traço horizontal. Em épura (fig. 161) toma-se arbitrariamente o ponto (A) no 2º diedro e 2º bissetor e o ponto (B) no (π_A). Unindo-se as duas projeções de mesmo nome, temos em (A)(B) a reta pedida.

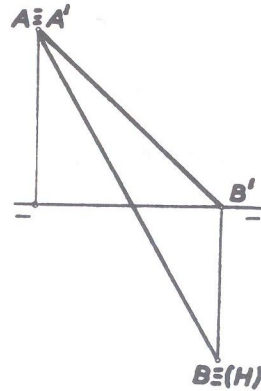



Fig.161

32 • Dada a reta (A)(B) e um ponto (C), traçar pelo ponto uma reta (C)(D) que encontre (A)(B). Mostrar como fica situada a reta pedida em relação aos planos de projeção.

(A) [0 ; 3 ; -1]
(B) [6 ; 1 ; 2]
(C) [4,5 ; 3,5 ; 0]
(D) [3 ; 0,5 ; ?]

SOLUÇÃO: (fig. 162 e 163)

Locados todos os pontos dados pelas suas coordenadas, une-se CD, que é a projeção horizontal da reta pedida, não se podendo fazer o mesmo com as projeções verticais dos pontos (C) e (D) por ser desconhecida a cota do ponto (D). A projeção CD intercepta AB, no ponto I, que por uma linha de chamada fornece I' sobre A'B'. É suficiente então unir C'I' que dá a conhecer D' na linha de chamada correspondente. A reta (C)(D) é pois a solução, que no espaço tem a posição indicada na fig. 163.

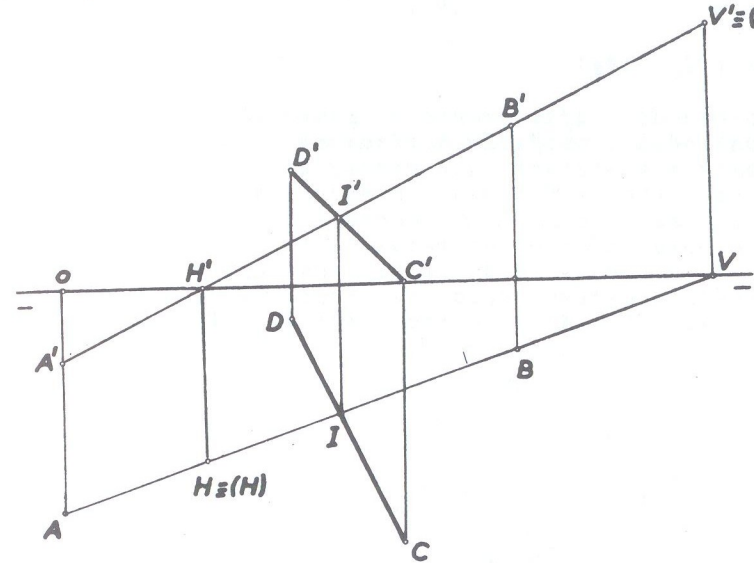



Fig.162

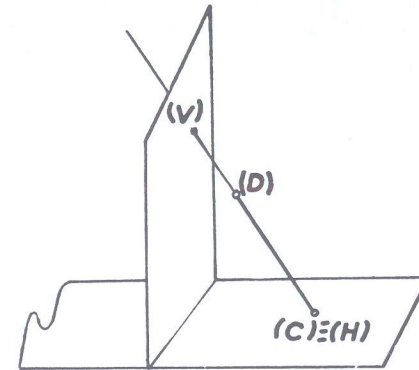



Fig.163

33 • Traçar duas retas (A)(B) e (C)(D) concorrentes, destacando os segmentos que se situam no 1º diedro.

(A) [-2,5 ; 1 ; 3]
(B) [6 ; -2 ; -2]
(C) [6 ; 1,5 ; 3]
(D) [0 ; ? ; -4]

SOLUÇÃO: (fig. 164)

Não é conhecido o afastamento do ponto (D); em consequência não é conhecida a projeção horizontal CD da reta (C)(D). As projeções verticais das duas retas, A'B' e C'D' cortam-se em E' que faz conhecer E sobre a projeção horizontal AB da reta (A)(B). Une-se CE e prolonga-se até encontrar D na linha de chamada correspondente. As retas (A)(B) e (C)(D) são concorrentes e solucionam. Para destacar os segmentos no 1º diedro, é suficiente a determinação dos traços verticais de ambas as retas e assim AV e A'V' na reta (A)(B) e CV_1 e $C'V'_1$ na reta (C)(D) são os segmentos pedidos.

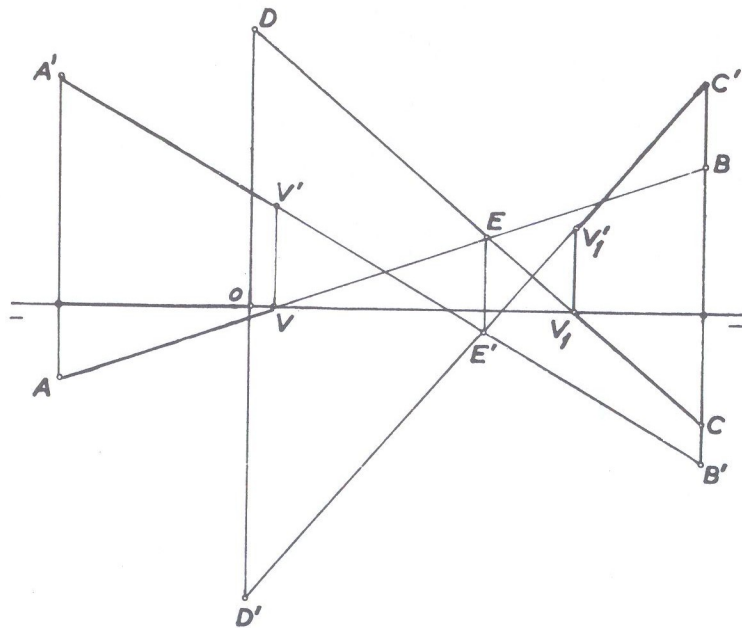



Fig.164

34 • Por um ponto (A) traçar duas retas concorrentes, paralelas respectivamente a duas retas dadas (F)(G) e (M)(N).

(A) [5 ; 4,5 ; 3]
(F) [-2 ; 0 ; 4]
(G) [6,5 ; 3 ; -3]
(M) [-1 ; 3 ; 5]
(N) [1 ; 0 ; 0]

SOLUÇÃO: (fig. 165)

Locadas as retas dadas e também o ponto dado, basta traçar pelas projeções do ponto, as retas (r) e (r_1) paralelas respectivamente às retas (F)(G) e (M)(N).

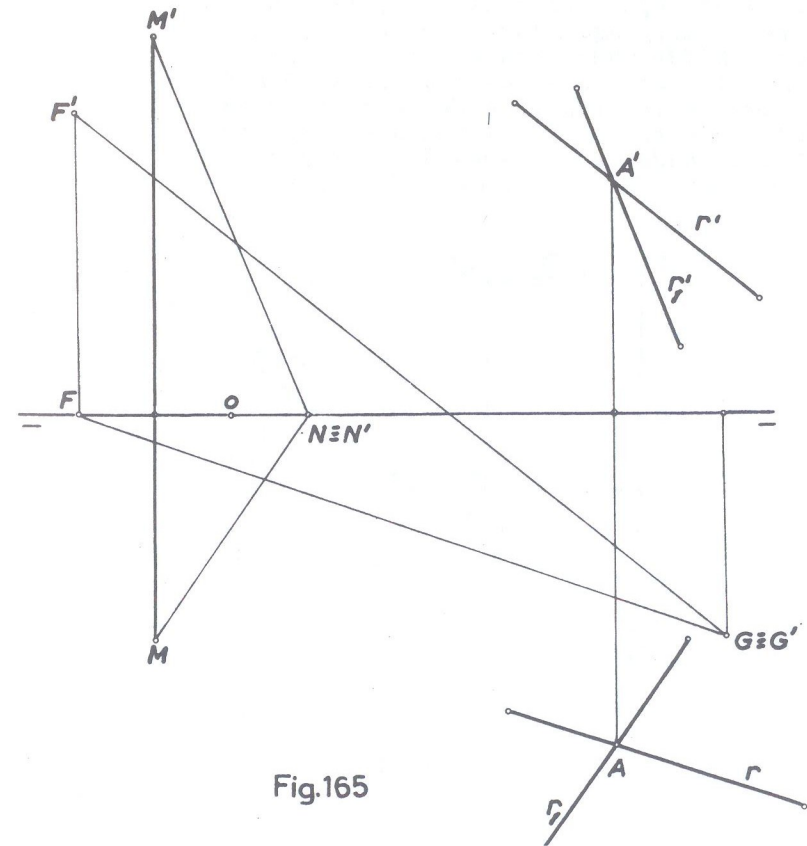



Fig.165

35 • Por um ponto dado (A), traçar duas retas (A)(B) e (A)(C) paralelas respectivamente às retas (D)(E) e (F)(G) que se cortam, sabendo-se que (F)(G) é vertical.

(A) [-2 ; 2 ; 3]
(B) [0 ; ? ; ?]
(C) [-2 ; ? ; 1]
(D) [1 ; 0 ; -1,5]
(E) [5 ; -3 ; -2]
(F) [3 ; ? ; 0]
(G) [3 ; ? ; -3]

SOLUÇÃO: (fig. 166)

Não são dados os afastamentos de (F) e de (G). Mas, para que duas retas se cortem quando uma delas é perpendicular a um dos planos de projeção, é suficiente que a projeção puntual de uma das retas se situe sobre a projeção de mesmo nome da outra. (Ver 3º caso de concorrência de retas, figuras 108 e 109). Então, a projeção horizontal FG, (que é um ponto porque a reta é vertical), se situa sobre ED que é a projeção horizontal da reta (E)(D) concorrente com a reta (F)(G). Basta pois, que do ponto (A) se tracem as projeções AB e A'B' paralelas respectivamente às projeções de mesmo nome das retas (D)(E) e (F)(G) e que são as retas pedidas. (no caso dado, A ≡ C porque F ≡ G, nada sendo necessário traçar).

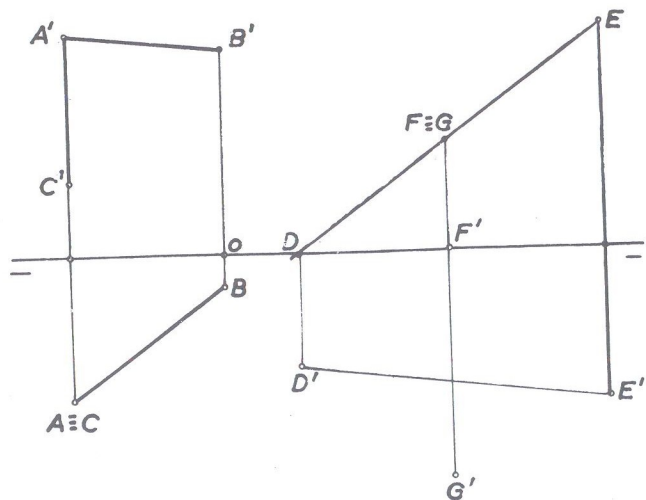



Fig. 166

36 • Por um ponto (A) traçar uma reta paralela a (B)(C) e que pertença ao (β_I).

(A) [-1 ; 2 ; ?]
(B) [1 ; 0 ; 0]
(C) [-2 ; 0 ; 0]

SOLUÇÃO: (fig. 167)

A reta dada (B)(C) está sobre ππ' (linha de terra); logo, a reta pedida terá que ser uma frontohorizontal. Só é dado o afastamento do ponto (A), mas como a reta pedida tem que ser do bissetor, então a cota de (A) é a mesma que o afastamento, e a reta (r), de projeções r e r' é a solução.

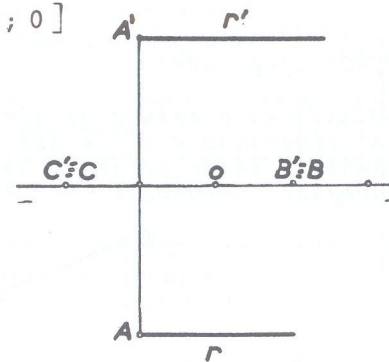



Fig. 167

37 • Completar a épura abaixo (fig. 168), sabendo-se que (C) pertence a (A)(B):

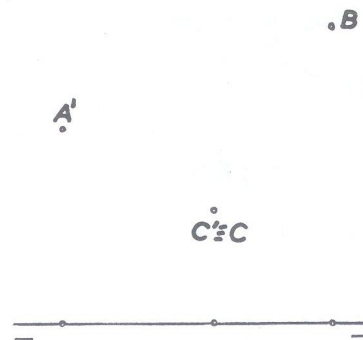



Fig. 168

NOTA: A solução encontra-se no fim dêste capítulo após a solução do exercício 28 (fig. 183).

38. Traçar a épura de uma reta (A)(B) simétrica de (C)(D) em relação ao plano(π)

(C) [1 ; 2 ; 3]

(D) [6 ; 4 ; 1]

SOLUÇÃO: (fig. 169)

Recordando-se o estudo de simetria de pontos, traça-se o ponto (A) simétrico a (C) e (B) simétrico a (D). A reta solução apresenta a mesma projeção horizontal da reta dada e A'B' é a sua projeção vertical.

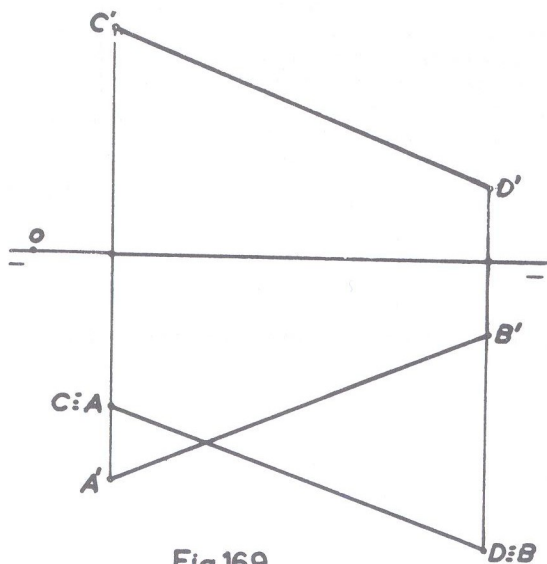



Fig.169

39. Grife o C ou E conforme a proposição esteja certa ou errada respectivamente.

1	Uma reta frontal possui constante as cotas de todos os seus pontos	C	E
2	Toda reta paralela a um dos planos de projeção é perpendicular ao outro.	C	E
3	Quando duas retas possuem projeções puntuais sobre o mesmo plano de projeção, elas são paralelas.	C	E

4	Duas retas de perfil com a mesma abscissa são paralelas ou reversas.	C	E
5	Quando um ponto possui suas projeções sôbre as de mesmo nome de qualquer reta, ele pertencerá à reta, sem exceção.	C	E
6	Duas retas concorrentes são sempre coplanares.	C	E
7	Quando uma reta de perfil é perpendicular à linha de terra, seus traços coincidem.	C	E
8	Quando duas retas são concorrentes as suas projeções sobre um mesmo plano de projeção serão também sempre concorrentes.	C	E
9	O paralelismo das projeções de mesmo nome de duas retas de perfil, embora necessário não é suficiente para se afirmar serem elas paralelas.	C	E
10	As retas que só possam ter segmentos em dois diedros são: horizontal, frontal, vertical, de topo e de perfil, quando perpendicular à $\pi\pi'$	C	E

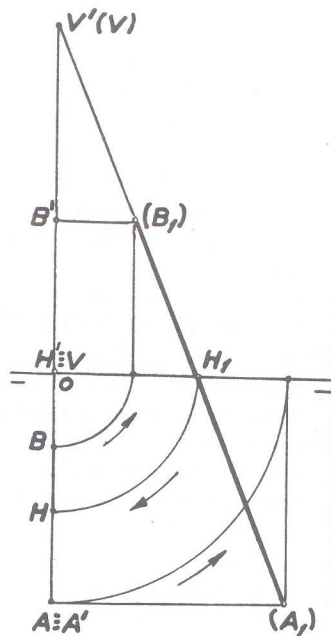
Obs.: As respostas aos quesitos estão no fim do Capítulo II, após a solução do exercício 37

40. Dada uma reta (A)(B) de perfil, pede-se:

a) sua verdadeira grandeza;

b) os diedros que atravessa.

(A) [0 ; 3 ; -3]

(B) [? ; 1 ; 2]

SOLUÇÃO: (fig. 170)

Locados os pontos dados e operando-se o rebatimento, encontramos:

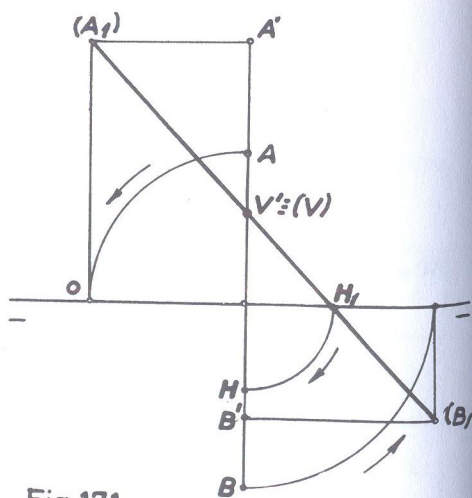
a) verdadeira grandeza em $(A_1)(B_1)$;

b) diedros atravessados: 1º, 2º e 4º

Fig. 170

41 • Mesmo exercício anterior com os pontos (A) e (B) na seguinte situação:

(A) [2 ; -2 ; 3,5]

(B) [? ; 2,5 ; -1,5]

SOLUÇÃO: (fig. 171)

De modo inteiramente idêntico ao exercício anterior, encontramos:

a) verdadeira grandeza em $(A_1)(B_1)$;

b) diedros atravessados: 1º, 2º e 4º.

Fig. 171

42 • Determinar os traços da reta (A)(B) sabendo-se que (A) pertence ao (β_P) e (B) está no (π'_I).

(A) [3 ; ? ; 2,5]

(B) [3 ; ? ; -2]

SOLUÇÃO: (fig. 172)

Do ponto (A) não foi dado o afastamento. Mas, não era mesmo necessário ser dado porque se disse que ele pertence ao (β_P), e por isso facilmente marca-se a projeção que faltava. Do mesmo modo o ponto (B), sabendo-se que pertence ao (π'_I), é locado facilmente, mesmo não sendo dado o afastamento o que também não era necessário. O traço vertical coincide com (B) e o traço horizontal é H após o alçamento.

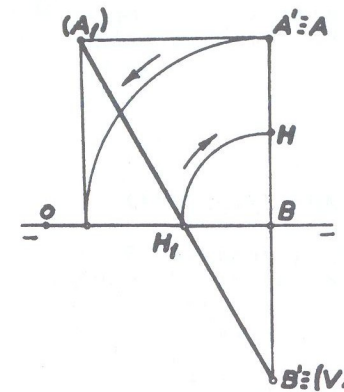



Fig. 172

43 • Conhecendo-se uma das projeções de um ponto (C) sobre a reta (A)(B), determinar a outra projeção do ponto.

(A) [-1 ; -3 ; -2]

(B) [-1 ; 2 ; 3]

(C) [? ; ? ; 2]

SOLUÇÃO: (fig. 173)

Efetuando-se o rebatimento já conhecido, temos em $(A_1)(B_1)$ a verdadeira grandeza da reta dada e sobre ela o ponto (C_1), obtido por uma paralela à linha de terra traçada da projeção conhecida (proj. vertical). Desfazendo-se o rebatimento, temos em C a projeção pedida.

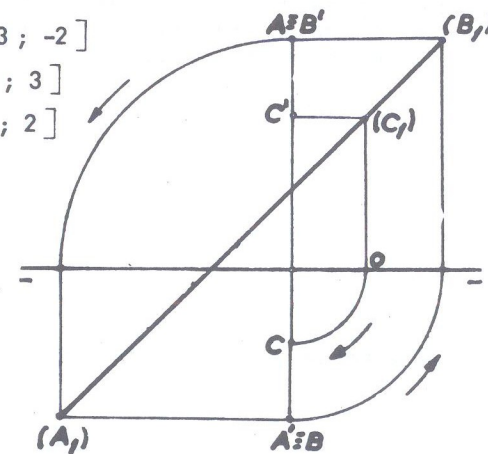



Fig. 173

44 • Mesmo exercício anterior, porém, sem utilizar rebatimento e os pontos na seguinte posição:

(A) [0 ; 1 ; 4]

(B) [0 ; 3 ; 2]

(C) [0 ; 2 ; ?]

SOLUÇÃO: (fig. 174)

Locada a reta (A)(B) e a projeção horizontal do ponto, empregamos a relação já conhecida (ver fig. 124)

$$\frac{BC}{BA} = \frac{B'C'}{B'A'}$$

donde $B'C' = \frac{BC \times B'A'}{BA}$ *e substituindo pelos valores, vem:*

$$B'C' = \frac{1 \times 2}{2} = 1$$

Marca-se então B'C' = 1 sendo B'C' sobre B'A', porque um ponto para pertencer a uma reta de perfil, tem que possuir suas projeções sobre as correspondentes da reta, embora a recíproca não seja verdadeira.

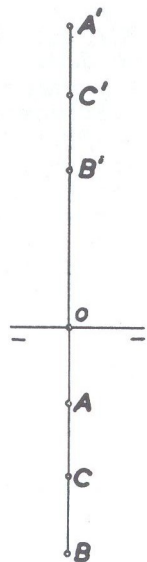



Fig. 174

45 • Por um ponto (C) traçar uma reta (C)(D) paralela a uma reta (A)(B).

(A) [2 ; -3 ; 3]

(B) [2 ; 1 ; 1]

(C) [4,5 ; 1,5 ; 2]

SOLUÇÃO: (fig. 175)

Rebatendo-se os planos em que estão contidos a reta e o ponto dados, têm-se $(A_1)(B_1)$ e (C_1). Por (C_1) traça-se $(C_1)(D_1)$ paralelamente a $(A_1)(B_1)$, sendo o ponto (D_1) marcado arbitrariamente, pois nenhuma condição foi imposta a esse ponto. Desfeito o rebatimento do plano que contém o ponto (C_1) teremos as projeções D e D' do ponto (D) e a reta pedida será (C)(D) dada pelas projeções CD e C'D'.

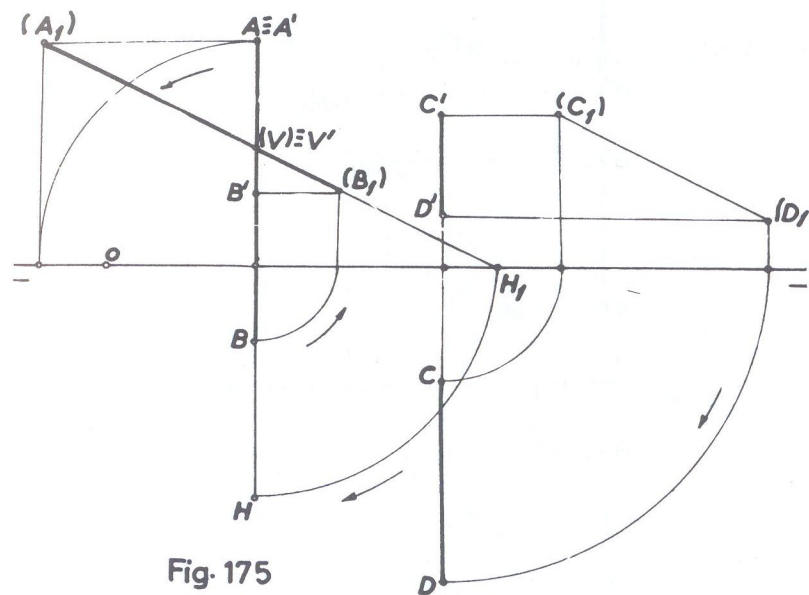



Fig. 175

46 • Dá-se uma reta de perfil (A)(B) e um ponto (M) no mesmo plano da reta. Pede-se traçar por (M) uma reta (M)(N) de 2 cm e paralela a reta (A)(B).

(A) [0 ; 1 ; 1]

(B) [0 ; 3 ; 3]

(C) [? ; 5 ; 5,5]

SOLUÇÃO: (fig. 176)

Não é dada a abscissa do ponto (M), mas como ele está situado no mesmo plano de perfil em que está contida a reta (A) (B), conclui-se que sua abscissa será a mesma dos pontos (A) e (B). Rebatido o plano de perfil que contém a reta, obtém-se $(A_1)(B_1)$ e (M_1) e por esse ponto (M_1) traça-se paralelamente a $(A_1)(B_1)$ o segmento $(M_1)(N_1)$ de 2cm de comprimento, pois $(M_1)(N_1)$, como já sabemos exprime a verdadeira grandeza do segmento (M)(N). Desfeito o rebatimento, temos em MN, M'N' as projeções da reta pedida. (Há uma 2a. solução não figurada na épura).

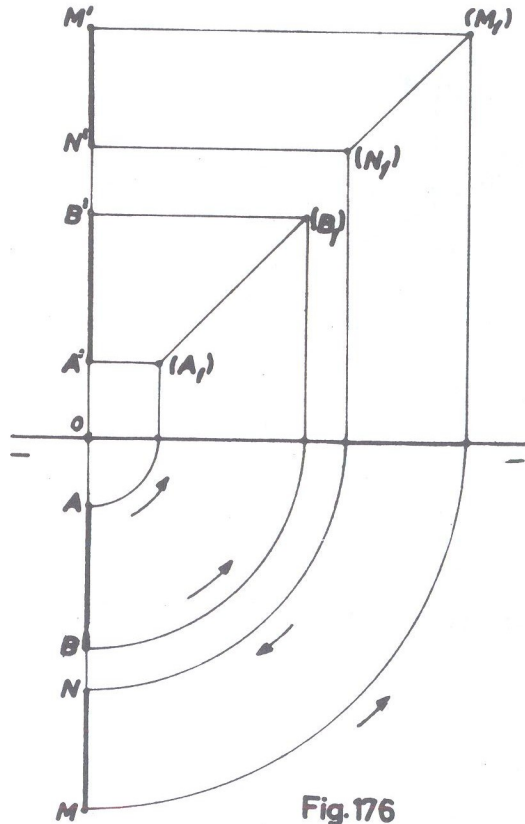



Fig.176

47 •Dão-se dois pontos (A) e (B) equidistantes da linha de terra e situados em um plano de perfil. Qual a posição do segmento retilíneo (A)(B) que une esses dois pontos ?

(A) [3 ; 3,5 ; 3,5]

(B) [? ; ? ; ?]

SOLUÇÃO: (fig. 177)

Se os pontos (A) e (B) são equidistantes da linha de terra, eles definem uma reta de perfil perpendicular à ππ'. E o ponto (B) será, portanto, simétrico ao ponto (A) em relação a ππ' : logo, a sua abscissa será a mesma do ponto (A) e as outras coordenadas iguais em grandeza mas de sentidos contrários às do ponto (A). O rebatimento do plano de perfil fornece em $(A_1)(B_1)$ o segmento pedido.

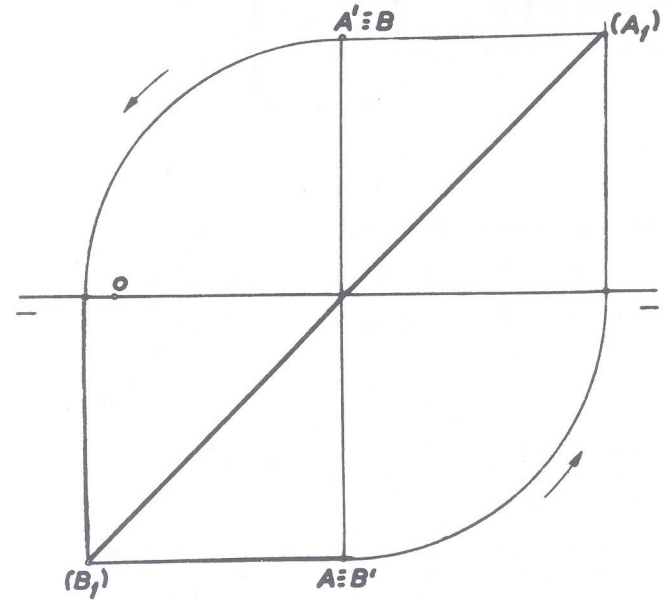



Fig.177

48 •Traçar a épura de duas retas de perfil (A)(B) e (C)(D) paralelas, sem recorrer ao rebatimento:

(A) [0 ; 1,5 ; 3] (C) [4 ; 1 ; 2]

(B) [0 ; 3 ; 0] (D) [4 ; 2 ; ?]

SOLUÇÃO: (fig. 178)

Locadas as retas dadas, traça-se a reta auxiliar BC, B'C'. Traça-se também a projeção horizontal AD, que corta BC no ponto 1 e faz conhecer 1' sobre B'C'. Unindo-se A'1' e prolongando-se, tem-se D' sobre a linha de chamada da reta CD, C'D'. (ver a fig. 135). As retas (A)(B) e (C)(D) são paralelas.

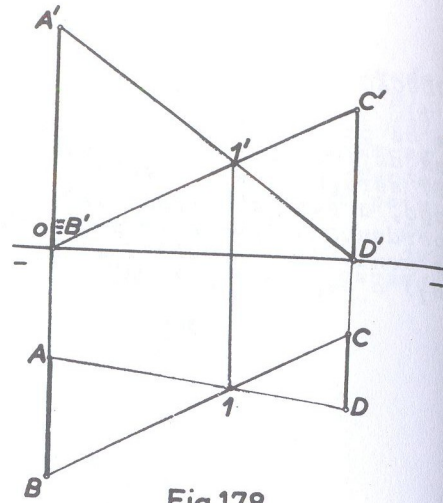



Fig.178

49 • Traçar uma reta de perfil (A)(B) que encontre uma reta (C)(D).

(A) [2 ; 3,5 ; 3,5]   (C) [1 ; 2 ; 1]
(B) [2 ; 1 ; ?]   (D) [6 ; 1 ; 3]

SOLUÇÃO: (fig. 179)

Loca-se a reta qualquer (C)(D) e o ponto dado (A) e verifica-se que as projeções horizontais AB e CD se interceptam em I que faz conhecer I' sobre C'D' pois é evidente que (I) pertence a (C)(D).
Rebatido o plano de perfil em que está contido o ponto (A), obtém-se (A_1) e (I_1). Une - se (A_1) (I_1) e prolonga-se até (B_1) na perpendicular à linha de terra proveniente do rebatimento da projeção horizontal B, e que dá a conhecer B' na mesma linha de chamada de B. A reta (A)(B), de perfil, pelas suas projeções AB, A'B', é a solução

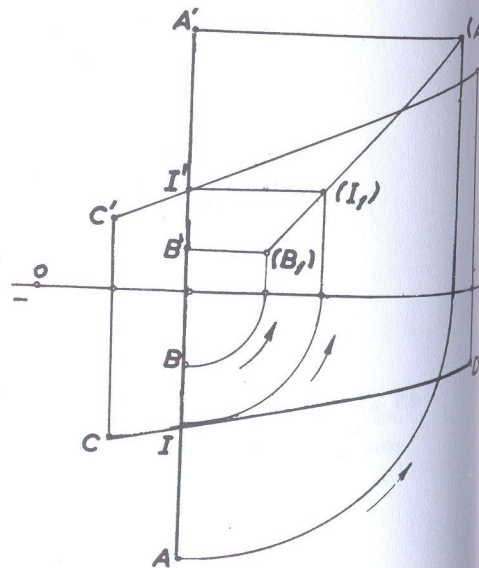



Fig.179

50 • Por um ponto (M) traçar uma frontal que encontre o plano horizontal a 3,5 cm de um ponto (A) desse plano.

(M) [0 ; 1 ; 2]
(A) [4 ; -2 ; 0]

SOLUÇÃO: (fig. 180)

Locados os dois pontos, obtém-se MM' e AA', este situado no plano (π_P). Com centro em A ≡ (A) e raio 3,5 cm descreve-se o arco de círculo e pela projeção horizontal M do ponto, faz-se passar, paralelamente à linha de terra, a projeção horizontal da frontal que interceptará o arco de círculo nos pontos H e H_1 pontos esses que dão a conhecer H' e H_1' respectivamente, sobre a linha de terra.
O problema admite duas soluções: retas (M)(H) e $(M)(H_1)$, cujas projeções são MH, M'H' e MH_1, $M'H'_1$.

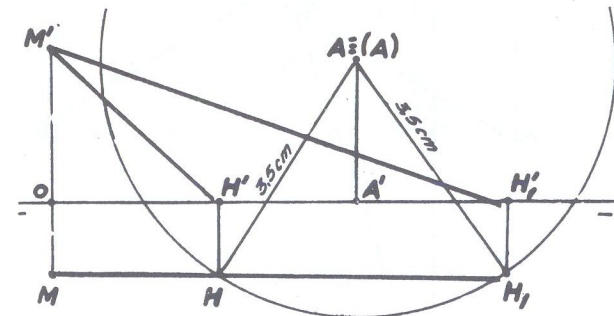



Fig.180

51 • Por dois pontos (A) e (B), traçar duas retas paralelas, sabendo-se que a reta que une os seus traços verticais, tem uma direção dada (C)(D).

(A) [0 ; 2 ; 4]   (C) [1 ; 0 ; -5,5]
(B) [6 ; ? ; -2]   (D) [4,5 ; 0 ; 4]

SOLUÇÃO: (fig. 181)

Locados os pontos, traça-se a reta (C)(D) de projeções CD, C'D'. Traça-se a seguir a reta (A)(V) que tenha o seu traço vertical V' sobre C'D' (a projeção vertical A'V' com qualquer inclinação). Por B' traça-se a projeção vertical B'V'₁ paralela à projeção A'V' e por V₁ a projeção V₁B paralela a AV. Fica assim determinado o afastamento do ponto (B) que não fôra dado e as retas (A)(V) e (B)(V₁) são paralelas e têm traços verticais sobre (C)(D).

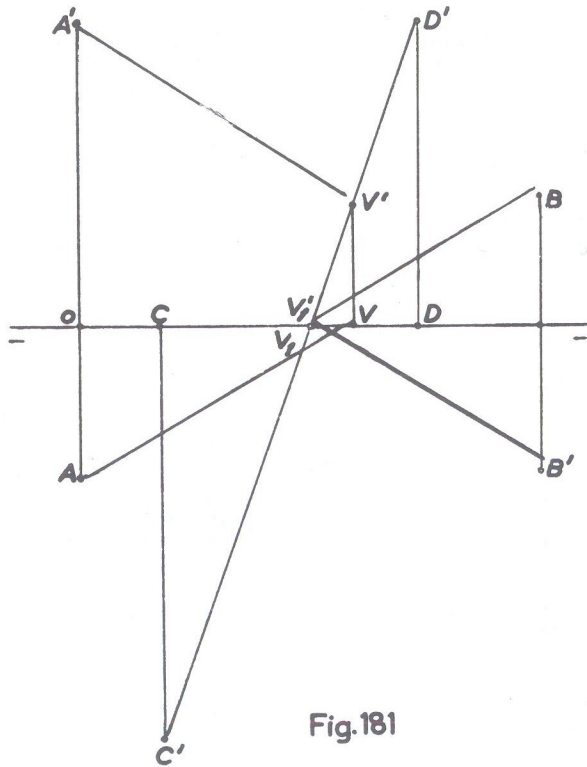



Fig.181

52 •Conhecida a projeção horizontal da reta (A)(B) e a projeção vertical de um dos seus pontos, determinar a projeção vertical da reta sabendo-se que o outro ponto pertence a uma reta de perfil (C)(D).

(A) [-1 ; 5 ; 3] (C) [? ; 3 ; -3]

(B) [5 ; 1,5 ; ?] (D) [? ; -2 ; 3,5]

SOLUÇÃO: (fig. 182)

Rebate-se o plano de perfil que contém a reta (C)(D) e sabendo-se que (B) está sobre (C)(D), determina-se facilmente a projeção vertical B'. Conhecendo-se essa projeção vertical B', traça-se a projeção vertical pedida.

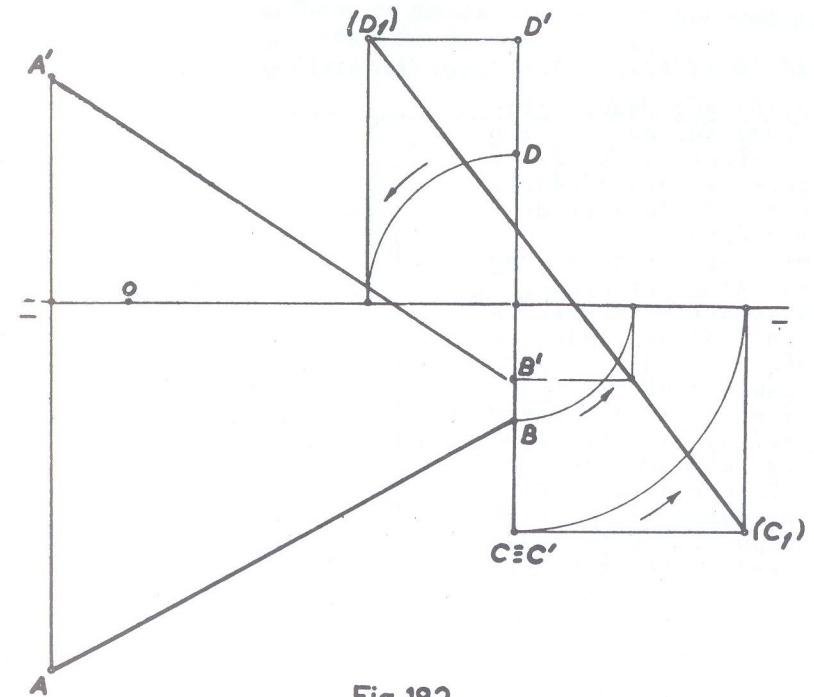



Fig.182

SOLUÇÃO DO EXERCÍCIO 28:

1 - a reta for perpendicular ao plano e neste caso então a projeção será um ponto.

2 - possuir suas projeções sobre as projeções correspondentes da reta, exceto quando a reta for de perfil.

3 - paralela ao plano vertical de projeção e oblíqua ao horizontal de projeção.

4 - reta qualquer passando pela linha de terra.

5 - estão num mesmo plano, podendo ser paralelas ou concorrentes.

6 - *paralelas ou reversas.*

7 - *paralelas entre si. Exemplo: retas verticais ou retas de topo.*

8 - *verdadeira grandeza.*

9 - *frontohorizontal.*

10 - *bissétor par.*

SOLUÇÃO DO EXERCÍCIO 37: (fig. 183)

Na fig.168 são dados: projeção vertical de (A); projeção horizontal de (B) e projeções em coincidência do ponto (C). Pede-se completar a épura.

Traçam-se as linhas de chamada por A' e por B, porque evidentemente as projeções A e B' não dadas nelas se situarão. Como diz o problema que o ponto (C) pertence à reta (A)(B), une-se BC e prolonga-se até A na linha de chamada baixada de A'. Tem-se assim AB.

Da mesma forma une-se A'C' e prolonga-se, obtendo-se B', e assim completando-se a épura.

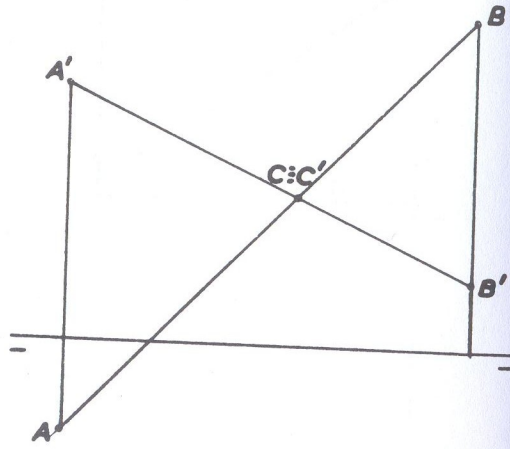



Fig. 183

SOLUÇÃO DO EXERCÍCIO 39:

PERGUNTAS	RESPOSTAS
1	E
2	E
3	C
4	E
5	E
6	C
7	C
8	E
9	C
10	C

CAPÍTULO III

• Estudo do plano. Traços do plano

Tal como vimos no estudo das retas, um plano pode ocupar várias posições em relação aos planos de projeção, tomando em consequência nomes diferentes.

Traço de um plano é a interseção desse plano em outro. Entretanto, emprega-se geralmente a expressão "Traços do Plano" para exprimir a interseção desse plano com os planos de projeção. Assim, na fig.184, o plano (α) intercepta o plano horizontal (π) segundo a reta $\alpha\pi$; o mesmo plano (α) intercepta o plano vertical(π') segundo a reta $\alpha\pi'$. Então as retas $\alpha\pi$ e $\alpha\pi'$ são os traços do plano (α) . Os traços de um plano são designados por uma letra do alfabeto grego

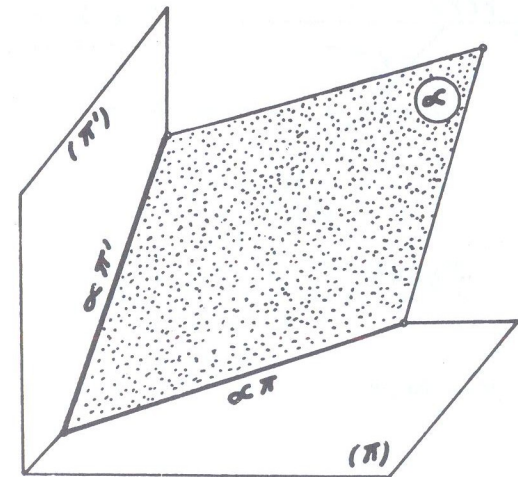



Fig.184

que individualiza o plano considerado, seguida da outra letra grega que individualiza o plano de projeção, isto é, (π) ou (π') conforme se trate de plano horizontal ou plano vertical respectivamente. Então, na fig. 184, como o plano considerado é (α), tem-se: traço horizontal a reta απ e traço vertical a reta απ'. Em geral um plano possui os dois traços, podendo entretanto possuir só um, pois, quando for paralelo a um dos planos de projeção, não terá traço nesse plano, como é evidente.

As posições dos traços de um plano em relação à linha de terra são variáveis, isto é, podem os traços ocupar posições diferentes, conforme a situação do plano, podendo ser distintos (concorrendo ou não com a linha de terra) e coincidentes com ππ'. Quando os traços são distintos e não paralelos à linha de terra, eles concorrem num mesmo ponto dessa linha e a épura é a da fig. 185. Na prática, nesse caso, para a determinação do plano na épura, são dados a abscissa do ponto T ≡ T' de concorrência dos traços sobre a linha de terra e os ângulos que cada traço forma com ππ'. Esses ângulos são orientados no sentido trigonométrico (sentido direto ou dos ponteiros) e têm a linha de terra como origem. Assim, por exemplo, na fig. 185, o ângulo de απ' com a linha de terra é contado no sentido da seta 1 e é positivo e o ângulo de απ com a mesma linha, é negativo e contado no sentido da seta 2.

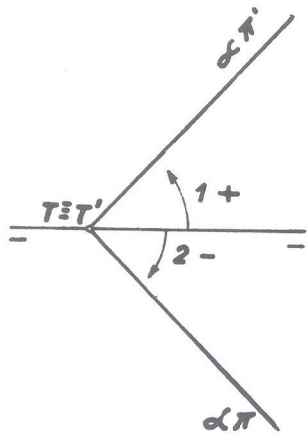



Fig.185

Posições do plano

Do mesmo modo que no capítulo anterior estudamos as posições das retas, veremos agora as posições dos planos, seus nomes e suas épuras.

I) PLANO QUALQUER

É o plano oblíquo dos dois planos de projeção (fig.184). Possui os dois traços distintos, concorrendo sobre a linha de terra em um mesmo ponto. Sua épura geralmente se apresenta como se vê na fig. 185. Entretanto pela maneira do plano se situar no espaço, a épura pode aparecer em qualquer das posições indicadas na fig. 186, pois o que caracteriza o plano é possuir os dois traços oblíquos à linha de terra, não importando como fiquem.

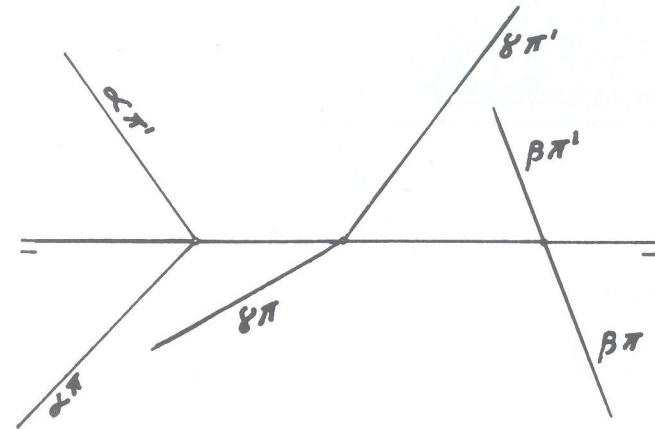



Fig.186

II) Planos segundo o paralelismo em relação aos planos de projeção.

PLANO HORIZONTAL (ou de nível)

Esse plano, se apresenta como nos mostra a fig. 187. Basta definí-lo como "plano paralelo ao plano horizontal de projeção". A épura (fig. 188) é caracterizada por possuir apenas um traço, o vertical, e, paralelo à linha de terra.

PLANO FRONTAL (ou de frente)

No espaço, se apresenta como nos mostra a fig. 189. É o plano "paralelo ao plano vertical de projeção".
A épura (fig. 190) é caracterizada por possuir também um traço apenas, o horizontal, e, paralelo à linha de terra.

Fig.187

απ'

Fig.188

Fig. 189

απ

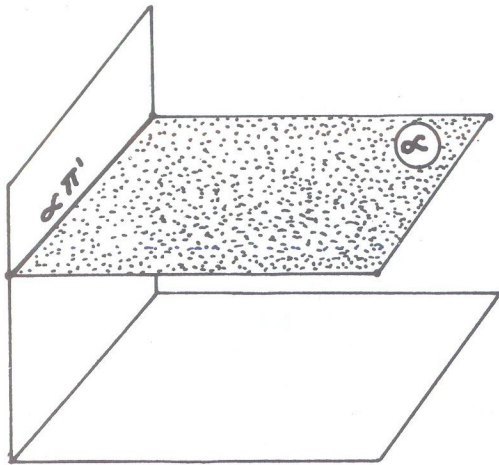
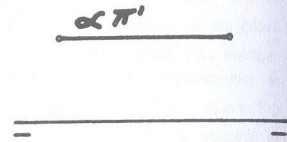
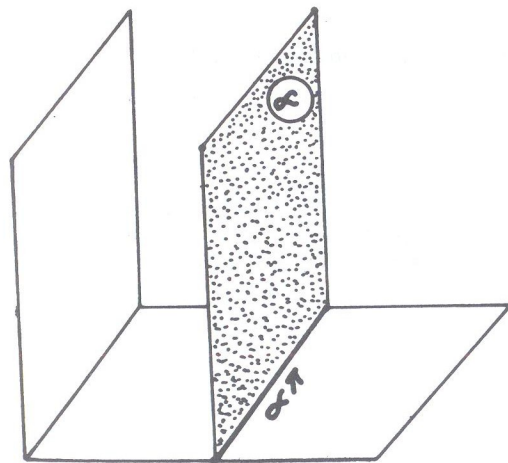
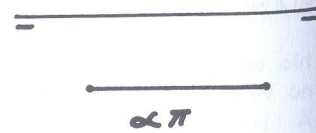



Fig. 190

III) Planos segundo o perpendicularismo em relação aos planos de projeção.

Obs.: Os dois planos estudados anteriormente são também perpendiculares, cada um, a cada plano de projeção, isto é, todo plano paralelo a um plano de projeção será forçosamente perpendicular ao outro; a recíproca, porém, não é verdadeira, como veremos nos dois planos a seguir.

PLANO VERTICAL

No espaço se apresenta como nos mostra a fig. 191. É o plano perpendicular ao plano horizontal e oblíquo ao vertical.

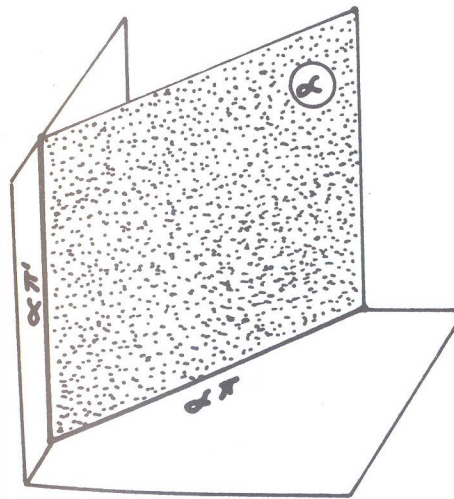



Fig.191

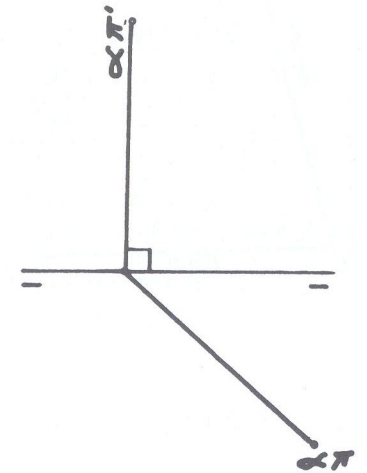



Fig.192

Sua épura (fig. 192) é caracterizada por possuir o traço vertical perpendicular à linha de terra e o horizontal oblíquo à mesma linha.

PLANO DE TOPO

No espaço se apresenta como nos mostra a fig. 193. É o plano perpendicular ao plano vertical e oblíquo ao horizontal. Sua épura (fig. 194) é caracterizada por possuir o traço horizontal perpendicular à linha de terra e o traço vertical oblíquo à mesma linha. É o inverso do plano vertical, anteriormente estudado.

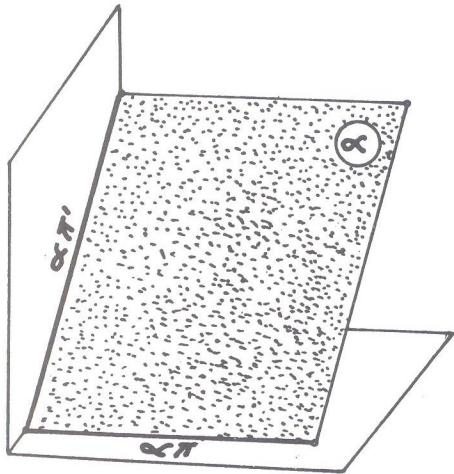



Fig.193

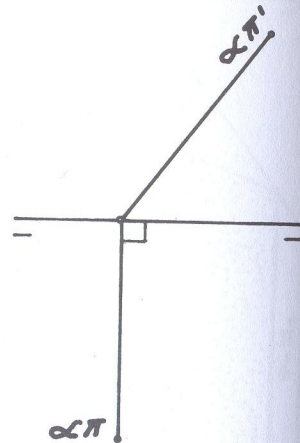



Fig.194

PLANO DE PERFIL

No espaço se apresenta como nos mostra a fig. 195. É o plano perpendicular aos dois planos de projeção. Sua épura é caracterizada por possuir ambos os traços em coincidência, perpendiculares à linha de terra (fig. 196).

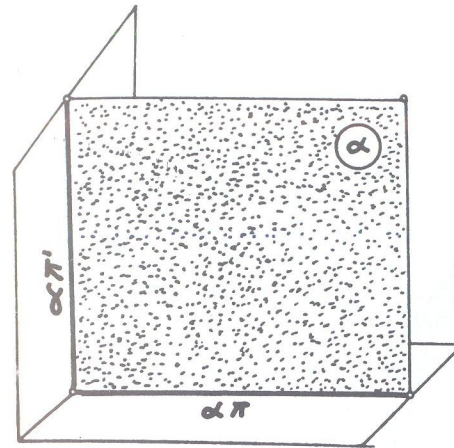



Fig.195

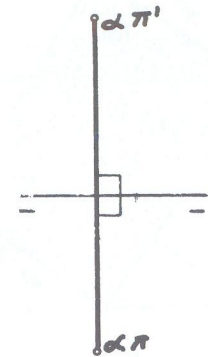



Fig.196

IV) PLANO PARALELO À LINHA DE TERRA

Quando do estudo da reta no capítulo anterior, vimos que não existe reta perpendicular, ao mesmo tempo, aos dois planos de projeção, mas sim reta perpendicular à interseção deles, que é a reta de perfil. Mas há reta paralela aos dois planos, que é o caso da frontohorizontal, paralela aos dois planos de projeção.

No estudo do plano, observa-se o inverso.

Não há plano paralelo aos dois planos de projeção, e sim paralelo à interseção deles, mas há plano perpendicular aos de projeção, que é o plano de perfil, que acabamos de expor.

O plano paralelo à linha de terra não tem nome especial. É apenas "um plano paralelo à linha de terra", e aparece no espaço como nos indica a fig. 197. Verifica-se que é um plano oblíquo aos dois planos de projeção, numa posição particular. Sua épura (fig. 198) é caracterizada por possuir ambos os traços paralelos à linha de terra.

Obs.: O plano paralelo à linha de terra, conforme nos indica a fig. 197, está no 1º diedro e atravessando o 2º e 4º e daí sua épura apresenta o traço vertical acima e o horizontal abaixo da linha de terra (fig. 198). Mas o plano pode estar n

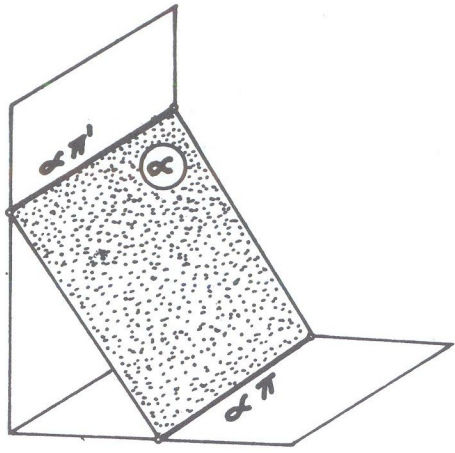
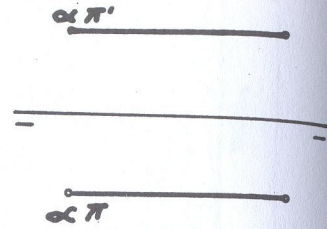



Fig. 197 Fig. 198

posição como aparece na fig. 199, atravessando os 1º, 2º e 3º diedros e nesse caso, a épura (fig. 200) mostra os dois traços acima da linha de terra, como também

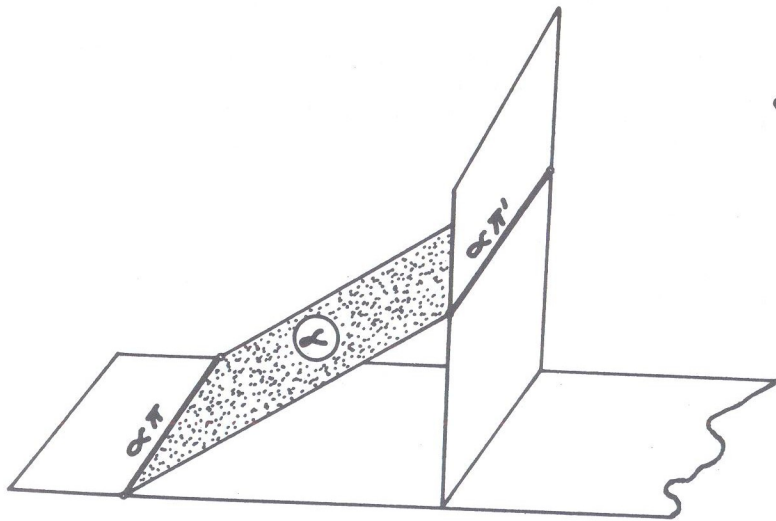
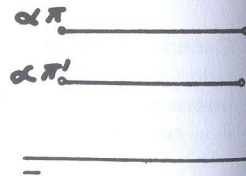



Fig. 200

Fig. 199

teria ambos os traços abaixo dessa linha se o plano passasse pelos 1º, 4º e 3º diedros, podendo ainda os traços coincidir, acima ou abaixo da linha de terra.

V) PLANO PASSANDO PELA LINHA DE TERRA

Nesse caso, conforme mostra a fig. 201 os traços do plano coincidem com a linha de terra. É o caso do plano bissetor, quando for o lugar geométrico de todos os pontos de afastamento e cotas iguais.

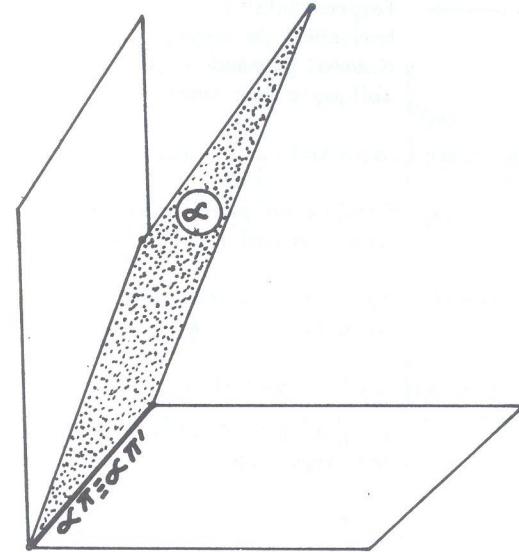



Fig. 201

Não sendo conhecida a inclinação do plano, ele só ficará determinado se conhecermos outros elementos, como um ponto ou uma reta desse plano, por exemplo, o que veremos mais adiante.

Resumindo o estudo das posições dos planos, temos:

1) Planos com dois traços distintos:

a) QUALQUER ⟶ Oblíquo nos dois planos de projeção. Traços oblíquos à linha de terra e concorrentes num mesmo ponto dessa linha.

b) PERFIL ⟶ Perpendicular aos dois planos de projeção. Traços numa mesma perpendicular à linha de terra.

c) PARALELO À LINHA DE TERRA → Os traços distintos, ambos paralelos à linha de terra.

d) VERTICAL → Perpendicular ao plano horizontal e oblíquo ao plano vertical de projeção. Traços distintos, sendo o vertical perpendicular à linha de terra e o horizontal oblíquo à essa linha.

e) TOPO → Perpendicular ao plano vertical e oblíquo ao plano horizontal de projeção. Traços distintos, sendo o horizontal perpendicular à linha de terra e o vertical oblíquo a essa linha.

2) Planos com um traço apenas:

a) HORIZONTAL → Paralelo ao plano horizontal de projeção. Só possui traço vertical e paralelo à linha de terra.

b) FRONTAL → Paralelo ao plano vertical de projeção. Só possui traço horizontal e paralelo à linha de terra.

3) Plano com traços em coincidência:

o que passa pela linha de terra, onde coincidem seus traços.

RETAS DO PLANO

Já estudamos as diversas retas: qualquer, horizontal, frontal, frontohorizontal, vertical, de topo, de perfil.

Já vimos também os diversos planos: qualquer, horizontal, frontal, vertical, de topo, de perfil, paralelo à linha de terra e passando pela linha de terra.

Estudaremos agora a combinação de ponto, retas e planos, focalizando a pertinência entre eles e as retas contidas nos planos.

Antes de estudarmos as retas dos planos, precisamos saber quando uma reta pertence a um plano, ou seja:

- **Pertinência de reta e plano**

REGRA GERAL

Uma reta pertence a um plano quando possui os seus traços sobre os traços correspondentes do plano.

Obs.: Essa regra sofre exceção quando se trata de um plano que passa pela linha de terra, o que veremos pouco mais adiante (fig. 229).

Um plano não pode conter senão determinadas retas. Vemos, por exemplo, na fig. 202, que o plano horizontal (α) de traço $\alpha\pi'$ não pode conter a reta vertical (r) pois só há um único ponto comum à reta e ao plano que é o ponto (A) onde a reta fura o plano. Entretanto, esse mesmo plano de traço $\alpha\pi'$ pode conter a reta

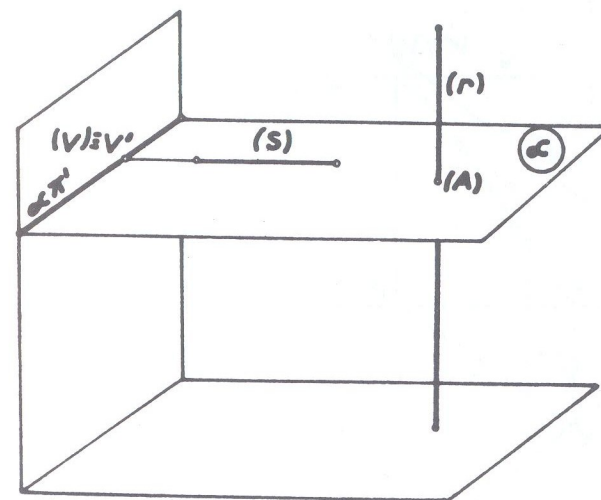



Fig. 202

de topo (s), a qual tem seu traço (V) sobre o traço vertical do plano, conforme a Regra Geral acima descrita. Com exceção do plano qualquer, que pode conter 4 retas diferentes, os demais planos só podem conter três retas cada um.

1) RETAS DE PLANO QUALQUER

Um plano qualquer sendo oblíquo dos dois planos de projeção, poderá conter as retas que também sejam oblíquas a eles ou, no mínimo, a um deles pelo menos. Assim, poderá conter as seguintes retas:

— qualquer ;
— horizontal ;
— frontal ;
— de perfil.

a) Reta qualquer: desde que os traços da reta estejam sobre os traços de mesmo nome do plano, a reta pertencerá ao plano, sem qualquer outra restrição. Vemos na épura da fig. 203, a reta (r) pertencer ao plano de traços $\alpha\pi$, $\alpha\pi'$ porque os traços (V) e (H) dessa reta estão sobre os traços correspondentes ao plano. Já na fig. 204 a reta (r) não pertence ao plano, porque o traço (H) da reta não está sobre o traço $\alpha\pi$ do plano.

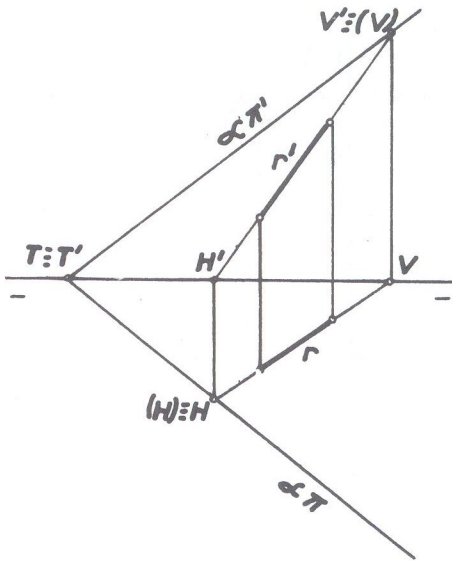



Fig. 203

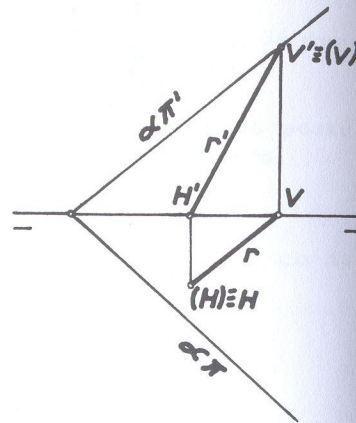



Fig.204

Obs.: Em geral, uma reta não define um plano, porque na fig. 203, por V' e por H podemos fazer passar tantos traços de planos quantos se queira. Mais adiante veremos quais as retas que definem um plano.

b) Reta horizontal: Uma reta horizontal não tem traço horizontal como já vimos quando estudamos traços de retas. Então, o ponto comum à projeção horizontal da reta e ao traço horizontal do plano será um ponto impróprio, isto é, estará

no infinito. Daí, conclui-se que a projeção horizontal da reta deverá ser paralela ao traço de mesmo nome do plano. Quanto ao traço vertical da reta deverá estar sobre o correspondente do plano, tal como vemos na épura da fig. 205.

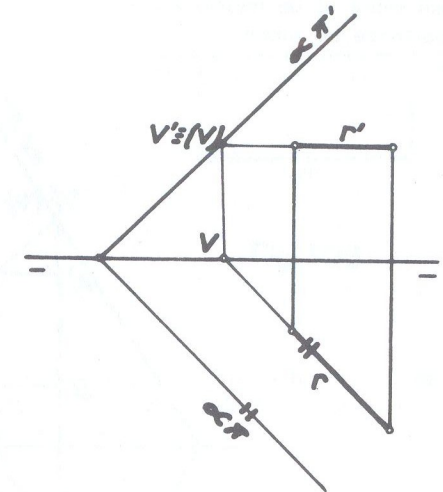



Fig.205

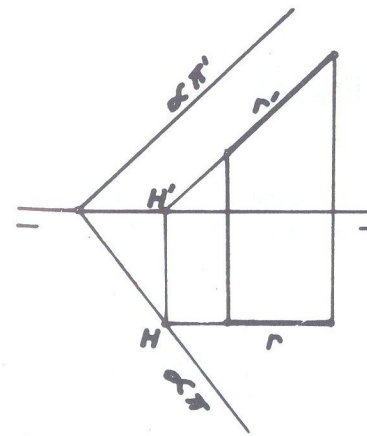



Fig.206

c) Reta frontal: Uma reta frontal não tem traço vertical. Então o ponto comum à projeção vertical da reta e ao traço vertical do plano será um ponto impróprio, ou seja, projeção vertical da reta paralela ao traço vertical do plano. Quanto ao traço horizontal da reta, deverá estar sobre o horizontal do plano, como nos mostra a épura da figura 206.

d) Reta de perfil: Tratando-se de reta de perfil, a épura não indica a simples vista, se ela pertence ou não a um plano qualquer. Opera-se o rebatimento do plano de perfil que contém a reta e determina-se seus traços, os quais, se estiverem sobre os de mesmo nome do plano, como mostra a fig. 207, indica que a reta pertence ao plano.

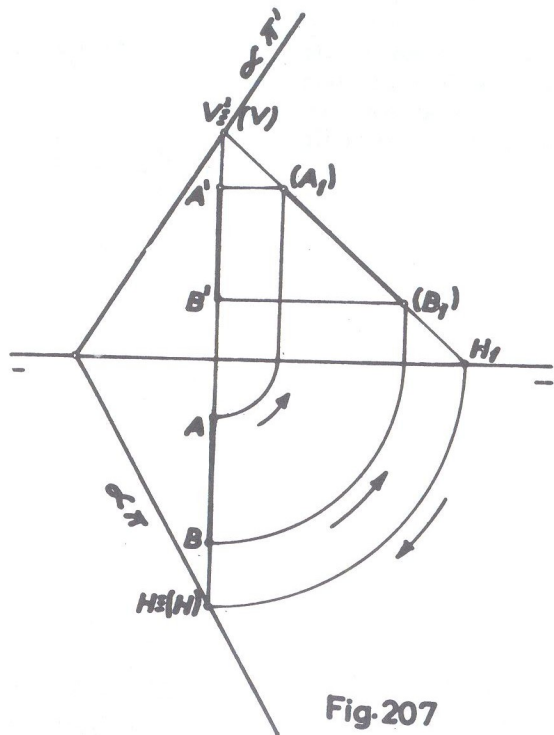



Fig.207

2) RETAS DE PLANO HORIZONTAL

Como o plano horizontal é paralelo ao plano horizontal de projeção, só poderá conter as retas que também sejam paralelas ao plano (π) e que são:

— horizontal ;
— frontohorizontal ;
— de topo.

a) Reta horizontal: A épura (fig. 208) se caracteriza pela coincidência da projeção vertical da reta com o traço $\alpha\pi'$ do plano. O traço vertical da reta — único que possui — está sobre o traço $\alpha\pi'$ do plano.

(vide figura 208 na página seguinte)

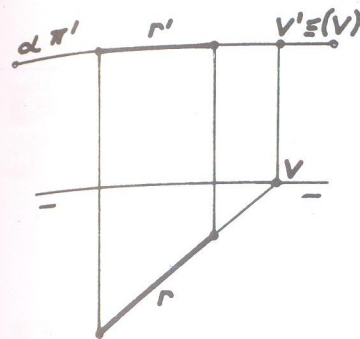



Fig.208

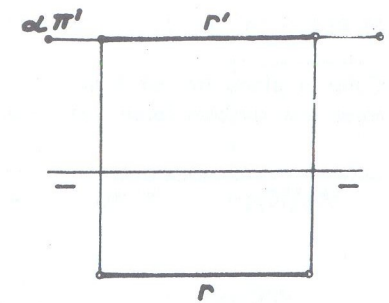



Fig. 209

b) Reta frontohorizontal: Não possuindo traços, a fronto horizontal de um plano horizontal é caracterizada pela épura da fig. 209, onde a sua projeção vertical r' coincide com o traço de mesmo nome do plano $\alpha\pi'$.

c) Reta de topo: Sendo a reta de topo caracterizada por possuir a projeção vertical reduzida a um ponto e a projeção horizontal perpendicular à linha de terra, a épura da fig. 210 mostra uma reta de topo (r) com a sua projeção puntual r' sobre $\alpha\pi'$, coincidente com seu traço vertical.

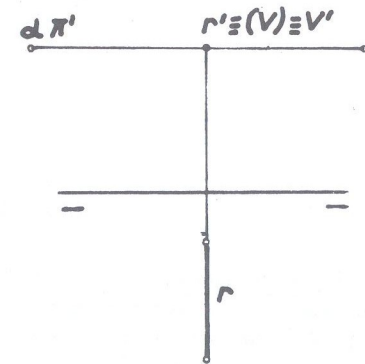



Fig. 210

3) RETAS DO PLANO FRONTAL

Como o plano frontal é paralelo ao plano vertical de projeção, só poderá conter as retas que também forem paralelas ao mesmo plano (π') e que são:

— frontal ;
— frontohorizontal ;
— vertical.

a) Reta frontal: A projeção horizontal da reta (r) coincide com o único traço do plano, que é o traço horizontal $\alpha\pi$, onde também está contido o único traço da reta, que é o horizontal (H).

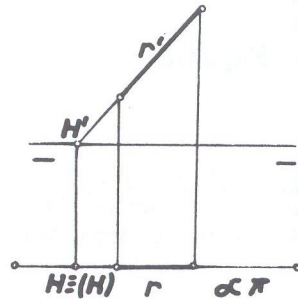



Fig. 211

b) Reta frontohorizontal: Não há dificuldade na sua representação e a épura (fig. 212) nos mostra a frontohorizontal (r) pertencente ao plano de traço $\alpha\pi$.

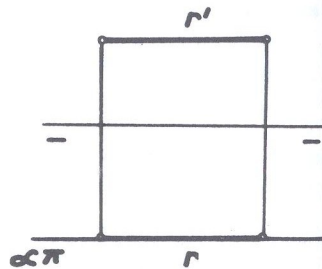



Fig. 212

c) Reta Vertical: Também não oferece dificuldade a sua representação. A épura (fig. 213) mostra uma reta (r) vertical como pertencendo a um plano frontal de traço $\alpha\pi$.

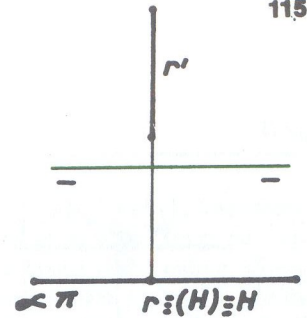



Fig. 213

4) RETAS DE UM PLANO PARALELO À LINHA DE TERRA

Sendo o plano paralelo à linha de terra, oblíquo aos dois planos de projeção, só poderá conter retas paralelas à linha de terra e oblíquas àqueles planos. Então, as retas que podem estar contidas em um plano paralelo à linha de terra são:

— qualquer;
— frontohorizontal;
— de perfil.

a) Reta qualquer: Se os traços da reta estiverem sobre os traços de mesmo nome do plano, a reta pertencerá ao plano. A épura da fig. 214 nos mostra uma reta qualquer (r) pertencendo a um plano de traços $\alpha\pi$ e $\alpha\pi$' paralelos à linha de terra.

Fig. 214

Fig. 215

b) Reta frontohorizontal: Quando a reta é frontohorizontal, a épura não indica diretamente se ela pertence ao plano. Seja na fig. 215 a reta (r) dada pelas suas projeções, que se deseja saber se pertence ao plano cujos traços são $\alpha\pi$ e $\alpha\pi'$. Para isso toma-se um ponto (O) de projeções O e O' sobre a reta dada, isto é, ponto com suas projeções sobre as de mesmo nome da reta dada e por ele faz-se passar uma reta auxiliar (H)(V), qualquer, situando-se o ponto (V) sobre o traço correspondente $\alpha\pi'$. Determinando-se o traço horizontal (H) dessa reta auxiliar, constata-se que ele não está sobre o traço $\alpha\pi$ do plano, o que significa que a reta dada não pertence ao plano. O ponto (O) pertence à reta dada e também à reta auxiliar por ele traçada; mas não pertence ao plano por que a reta (H)(V) não pertence. E, se um ponto não pertence a um plano, nenhuma reta que o contiver, pertencerá.

A fig. 216 nos mostra a épura de uma reta (s), frontohorizontal, pertencendo a um plano(α) paralelo à linha de terra.

Fig. 216

Fig. 217

c) Reta de Perfil: Semelhantemente ao que foi feito na fig. 207, a épura não indica diretamente se a reta de perfil (A)(B) pertence ao plano paralelo à linha de terra. Opera-se o rebatimento do plano de perfil que contém a reta, cujos traços, determinados, deverão estar sobre os de mesmo nome do plano, conforme se verifica na épura da fig. 217. Nesse caso, a reta de perfil pertence ao plano paralelo à linha de terra, porque os traços H e V' estão sobre os correspondentes do plano.

5) RETAS DE UM PLANO VERTICAL

Sendo o plano vertical perpendicular ao plano horizontal de projeção e oblíquo ao plano vertical, só poderá conter retas que sejam perpendiculares ao plano (π) e oblíquas ao plano(π'). E essas retas são:

- qualquer ;
- horizontal ;
- vertical.

Observe-se a fig. 218. Verifica-se que toda figura contida num plano vertical, se projetará no plano (π) sobre o traço horizontal $\alpha\pi$ do plano, com o qual coincidirá.

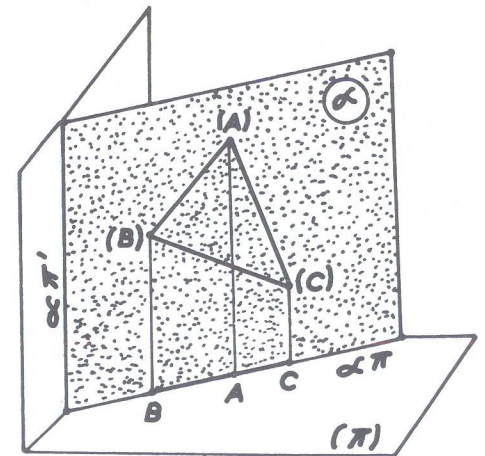



Fig. 218

a) Reta qualquer: A reta qualquer (A)(B) da fig. 219 pertence ao plano vertical de traços $\alpha\pi$ e $\alpha\pi'$ porque obedece à regra geral de possuir traços sobre os traços correspondentes do plano e sua projeção horizontal coincide com o traço de mesmo nome do plano.

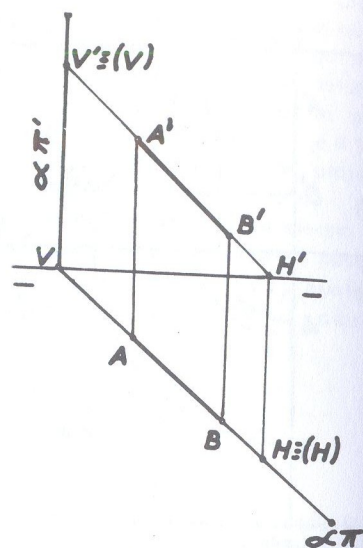



Fig.219

b) Reta horizontal: Do mesmo modo, a horizontal (A)(B) da fig. 220 pertence ao plano vertical, porque seu único traço (traço vertical) está sobre o traço vertical do plano ($\alpha\pi'$) e sua projeção horizontal coincide com o traço $\alpha\pi$ do plano.

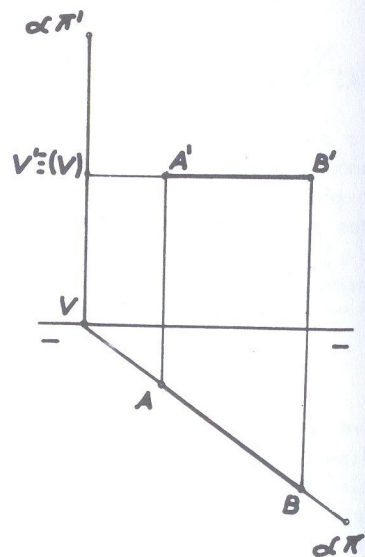



Fig.220

c) Reta Vertical: A vertical (r) da fig. 221 também pertence ao plano vertical, porque seu traço horizontal (que coincide com a projeção puntual) está sobre o traço $\alpha\pi$ do plano e sua projeção vertical é paralela ao traço vertical do plano.

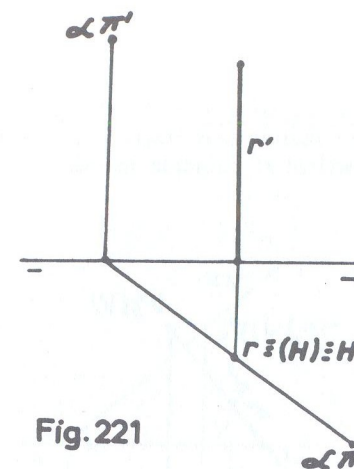



Fig.221

6) RETAS DE UM PLANO DE TOPO

Sendo o plano de topo perpendicular ao vertical de projeção (π') e oblíquo ao horizontal (π), só poderá conter retas que sejam oblíquas ao plano (π) e perpendiculares ao plano(π') e que são:

- qualquer;
- frontal;
- de topo.

Observe-se a fig. 222. Verifica-se que toda figura contida num plano de topo, se projetará no plano(π') sobre o traço $\alpha\pi'$ com o qual coincidirá.

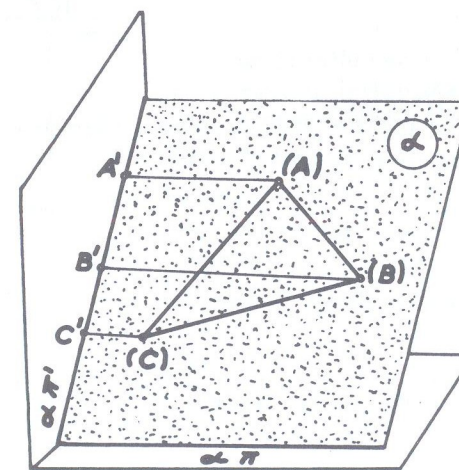



Fig 222

a) Reta Qualquer: A reta qualquer (r) da fig. 223 pertence ao plano (α) de topo, por possuir seus traços sobre os traços correspondentes do plano e a sua projeção vertical r' coincide também com o traço απ' do plano.

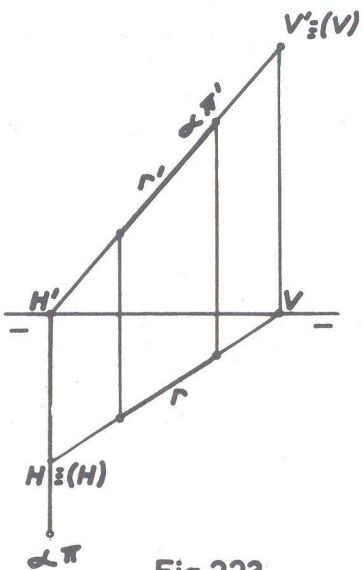



Fig. 223

b) Reta Frontal : Sem dificuldade se constata que a reta frontal (s) da fig. 224, pertence ao plano de topo - (α).

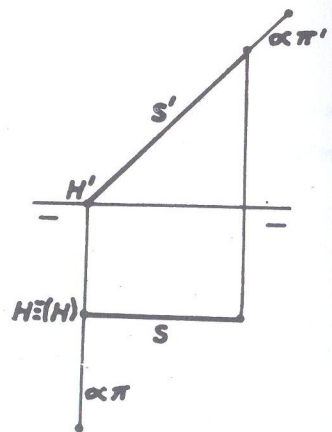



Fig. 224

c) Reta de Topo: Pelas razões já expostas, a fig. 225 nos mostra uma reta de topo (s) pertencendo a um plano de topo, porque sua projeção puntual S' está sobre o traço απ' e sua projeção horizontal S é paralela ao traço απ do plano.

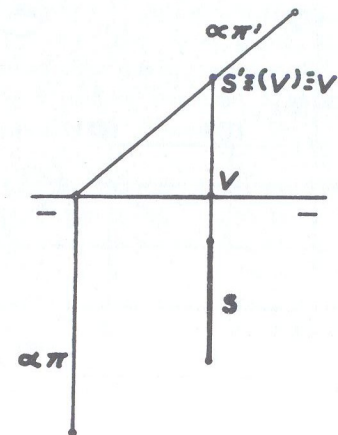



Fig. 225

7) RETAS DE UM PLANO DE PERFIL

Sendo o plano de perfil perpendicular aos dois planos de projeção, só poderá conter, como é evidente, retas que sejam perpendicular a (π) ou a (π') e perpendicular à interseção deles, isto é, perpendicular à linha de terra ππ'. Tais retas são :

- de topo;
- vertical;
- de perfil.

Em qualquer dos casos, as projeções da reta estarão em coincidência com os traços correspondentes do plano.

A fig. 226 nos mostra, em um plano de perfil (α), as retas (A)(B) vertical, (C)(D) de topo e (E)(F) de perfil e na fig. 227, a épura correspondente das mesmas retas no plano de traços απ e απ'.

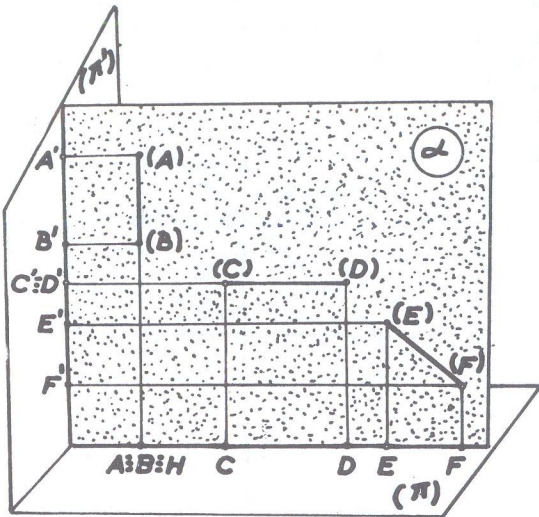



Fig.226

Fig.227

8) RETAS DE UM PLANO QUE PASSA POR ππ'

Um plano que passa pela linha de terra, é um plano oblíquo aos dois planos de projeção, nessa posição particular como vimos na fig. 201. Se ele estiver igualmente inclinado em relação aos planos de projeção, será então um plano bissetor. Esse plano só poderá conter retas que passem pela mesma linha que ele, isto é, retas que passem pela linha de terra ou paralela a essa linha.

Quando do estudo desse plano (fig. 201), foi dito que ele só ficaria determinado se conhecêssemos outros elementos, como um ponto ou uma reta e agora explicaremos a razão.

Como bem se observa na fig. 201, os traços desse plano se confundem em uma úni-

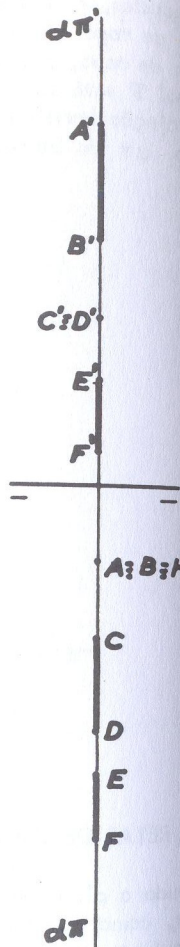
ca reta, que é a linha de terra. E como normalmente uma reta só não define um plano (a exceção veremos pouco adiante, com retas de máximo declive e máxima inclinação), segue-se que somente a linha de terra não pode definir o plano que por ela passa. Então é necessário, pelo menos, mais um ponto para que, com a linha de terra, possam definir o plano. Assim, na fig. 228, o ponto (A) e a linha de terra ππ' definem o plano nessa posição e, como nesse ponto, cota e afastamento são iguais, temos então a épura do plano bissetor (no caso o 1º bissetor)(β_I) e que se lê: plano ππ'(A).

A'
ππ'
A

Fig.228

Dissemos, quando estudamos "Retas de planos", que a regra geral para uma reta pertencer a um plano é que seus traços deveriam estar sobre os traços correspondentes do plano ; mas ficou dito também que havia uma exceção, quando se tratasse de plano que passasse pela linha de terra e é essa exceção que estudaremos a seguir.

Seja a fig.229, onde o plano(α) passa pela linha de terra e a reta (A)(B) com um ponto (A) sobre ππ .

Fig.229

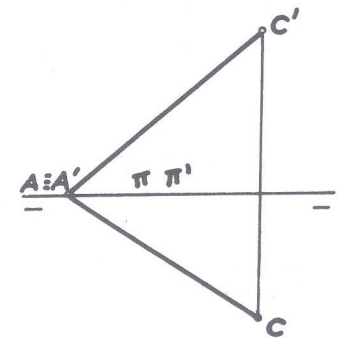



Fig.230

Observa-se que a reta tem seus traços sobre $\pi\pi'$ e portanto sobre os traços do plano, e entretanto ela não pertence ao plano. A reta (A)(C) na mesma figura 229 pertence ao plano (α) porque ambos os pontos (A) e (C) pertencem ao plano. A fig. 230 fornece a épura de uma reta (A)(C) pertencente ao plano $\pi\pi'$ (C).

Também, quando uma reta tem um ponto sobre a linha de terra em coincidência com o ponto de concorrência dos traços do plano, não podemos a priori, pela simples inspeção da épura, afirmar se ela pertence ao plano. É preciso nesse caso verificar se mais um ponto da reta pertence ao plano. (O caso de pertinência de ponto a plano será estudado imediatamente a seguir).

Na épura da fig. 231, a reta (A)(B) não pertence ao plano de traços $\alpha\pi$ e $\alpha\pi'$ apesar de possuir seus traços sobre os traços de mesmo nome do plano, porque o ponto (B) não pertence à horizontal (V)(C) do plano.

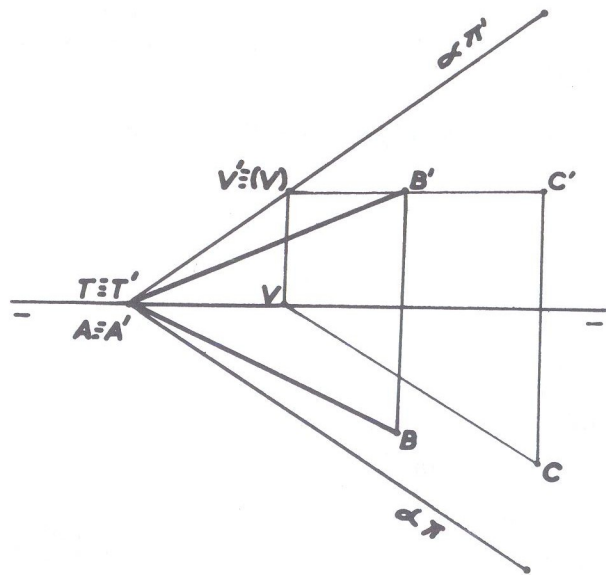



Fig. 231

- **Pertinência de ponto e plano**

REGRA GERAL (sem exceção):

"Um ponto pertence a um plano quando pertence a uma reta do plano."

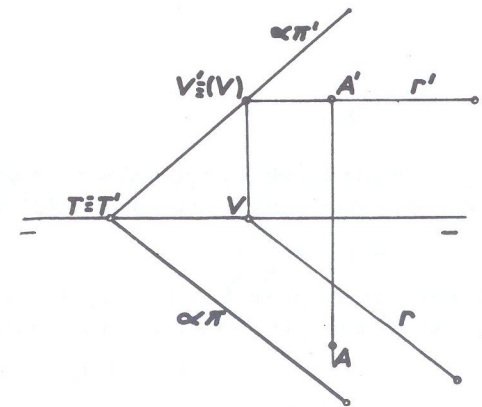
Seja a fig. 232, onde são dados o plano qualquer de traços $\alpha\pi$ e $\alpha\pi'$ e o ponto (A). A épura não indica diretamente se o ponto pertence ou não ao plano e, para a verificação, procede-se do seguinte modo: por uma das projeções do ponto (no caso, pela projeção vertical A') faz-se passar uma reta (r) do plano (no caso, uma horizontal). Esta horizontal tem seu traço vertical sobre o traço vertical do plano e sua projeção horizontal é paralela ao traço do mesmo nome do plano (ver fig. 205).

Verifica-se que a projeção horizontal A do ponto não está sobre a projeção de mesmo nome da reta. Então o ponto (A) não pertence à reta (r). A reta (r) pertence ao plano e o ponto (A) não pertencendo à reta (r) não pertencerá ao plano.

Fig. 232

Seja ainda a fig. 233: um plano com os traços em linha reta (plano qualquer) e o ponto (A) dado pelas projeções, que desejamos saber se pertence ou não ao plano.

Usou-se agora uma frontal (r), cuja projeção vertical r' passando por A' é paralela ao traço $\alpha\pi'$ do plano e projeção horizontal r paralela à linha de terra. É uma frontal do plano porque o seu traço horizontal <u>H</u> está sobre $\alpha\pi$. Verifica-se que

a projeção A está sobre a projeção r da reta e portanto, o ponto (A) pertence à reta (r). Logo, o ponto (A) pertence ao plano porque pertence à reta (r) desse plano.

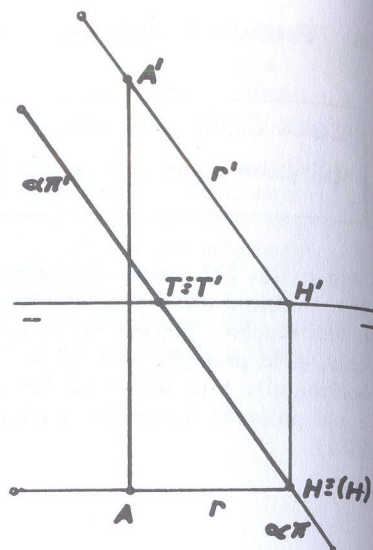



Fig. 233

Obs.: Neste estudo de "pertinência de ponto e plano" podemos simplificar a questão, conforme o plano seja "projetante" ou "não projetante".

Diz-se que um plano é projetante, quando é perpendicular pelo menos a um dos planos de projeção. Assim, são projetantes, os planos:

- ●●● Horizontal (perpendicular a π')
- ●●● Frontal (perpendicular a π)
- ●●● Vertical (perpendicular a π)
- ●●● Topo (perpendicular a π')
- ●●● Perfil (perpendicular a π e π')

São "não projetantes" os planos oblíquos aos de projeção. São eles: qualquer, paralelo à linha de terra e os que contêm a linha de terra.

Então, se o plano é projetante, a épura indica diretamente se um ponto dado pertence ou não a ele. A simples situação de uma das projeções do ponto é suficiente para a afirmação. Consideremos a que plano de projeção é perpendicular o plano dado.

1º) Se for perpendicular ao plano horizontal (π), para que um ponto a ele pertença, é suficiente que possua sua projeção horizontal sobre o traço horizontal do plano.

Exemplo: Na fig. 234, vemos um ponto (A) pertencendo a um plano (α) frontal e a projeção horizontal A do ponto sobre o traço απ do plano. Na épura (fig.235), estando a projeção A sobre απ, não importa onde esteja a projeção vertical: em A', A" ou A''', o ponto (A) pertence ao plano.

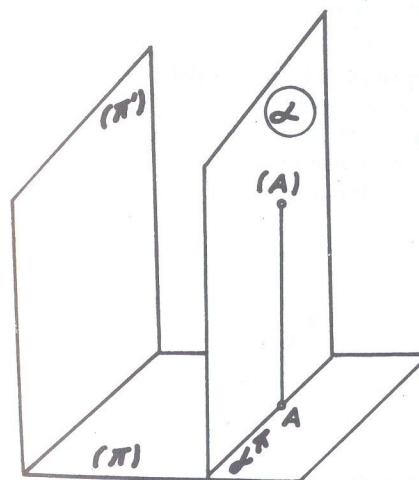



Fig.234

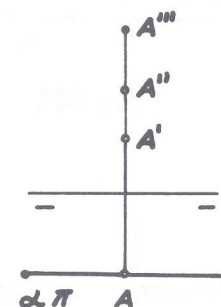



Fig.235

2º) Se for perpendicular ao plano vertical(π')para que um ponto a ele pertença, é suficiente que possua sua projeção vertical sobre o traço vertical do plano.

Exemplo: Na fig. 236, vemos um ponto (B) pertencendo a um plano (α) de topo e sua projeção vertical B' sobre o traço απ' do plano.

Na épura (fig. 237) estando a projeção B' sobre απ', não importa onde esteja a projeção horizontal: em B, B_1, B_2, o ponto (B) pertence ao plano.

(vide figuras 236 e 237 na página seguinte)

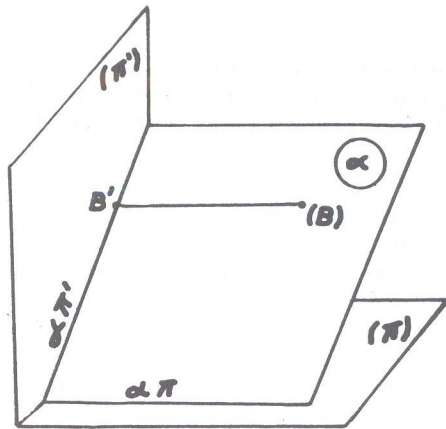



Fig. 236

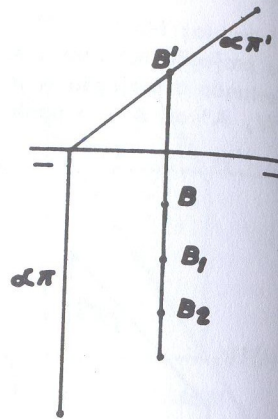



Fig.237

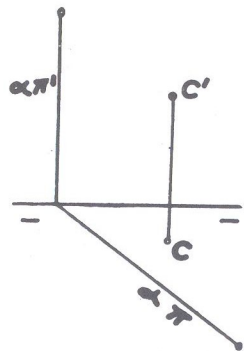



Fig. 238

Na épura da fig. 238, só pela posição da projeção C de um ponto (C), pode-se afirmar que o ponto (C) não pertence ao plano vertical (α), porque aquela projeção não está sobre o traço correspondente do plano.

Tratando-se de planos "não projetantes", cabe então a regra geral anteriormente descrita, onde as figuras 232 e 233 esclarecem.

Seja ainda, como exemplo, a fig. 239, considerando-se o plano paralelo à linha de terra, ao qual deseja-se saber se lhe pertence o ponto (A). Traça-se por A' a projeção vertical de uma reta qualquer auxiliar, situando-se o traço vertical V' sobre απ' e o horizontal H sobre απ. Verifica-se que a projeção horizontal A do ponto está sobre a horizontal VH da reta, indicativo então que o ponto pertence à reta, e consequentemente, pertencendo também ao plano.

Quando um ponto possuir uma das projeções sobre um dos traços do plano e a outra projeção estiver sobre a linha de terra, então, nesse caso, o ponto pertence ao traço do plano onde se situar a projeção.

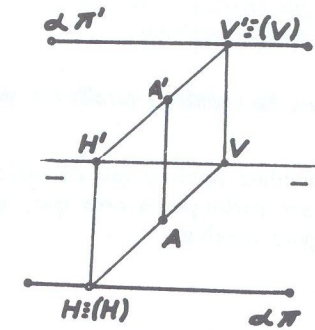



Fig. 239

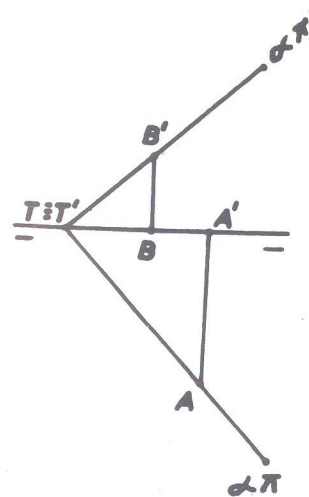



Fig. 240

Exemplo: Na fig. 240, o ponto (A) pertence ao traço horizontal απ do plano (α) e o ponto (B) ao traço vertical απ' do mesmo plano.

Retas principais de um plano

São assim chamadas as horizontais e as frontais do plano, pela larga aplicação que têm, na resolução de exercícios, como veremos mais adiante na parte prática referente a este capítulo.

Retas de máximo declive e máxima inclinação

Reta de máximo declive (ou de maior declive) de um plano em relação a outro plano, é, por definição, a reta que, pertencendo a um, forma com o outro plano, o maior ângulo possível.

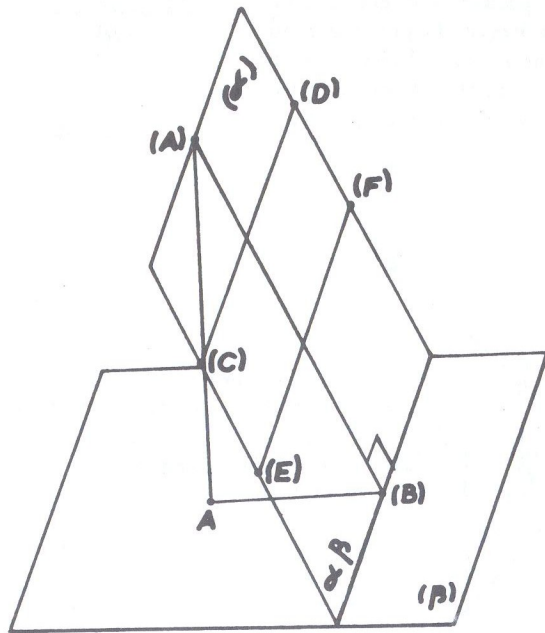



Fig. 241

Dados dois planos oblíquos (α) e (β) (fig. 241), toda reta (A)(B) de máximo declive de (α) em relação a (β) é perpendicular à interseção αβ dos dois planos. A recíproca é verdadeira, isto é, toda reta pertencente a (α) e perpendicular a αβ é de máximo declive de (α) em relação a (β). As retas de máximo declive de um plano são perpendiculares às horizontais desse plano. Assim, na fig. considerada, (A)(B) é perpendicular às horizontais (C)(D) e (E)(F) do plano(α) e portanto ao traço horizontal αβ desse plano.

A épura de uma reta de máximo declive (fig. 242) é caracterizada por possuir sua projeção horizontal VH perpendicular ao traço horizontal απ do plano.

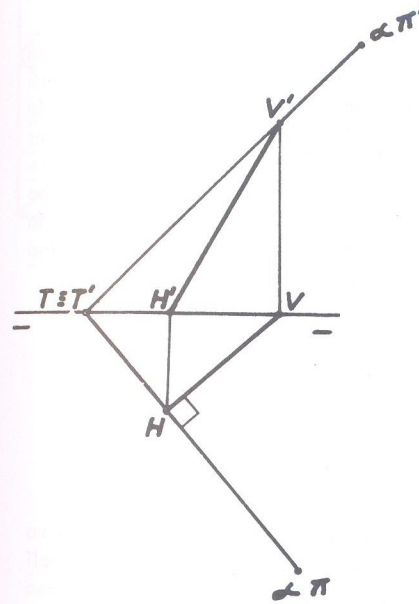
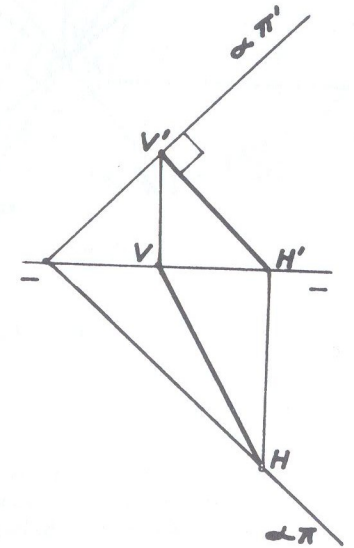



Fig.242 Fig.243

A reta de máximo declive então define um plano, porque, pelo seu traço horizontal H, só se poderá traçar, perpendicularmente à projeção horizontal da mesma, um único traço de plano. Se esse perpendicularismo for no plano vertical, isto é, se a projeção vertical da reta for perpendicular ao traço vertical do plano que a contém, diz-se então que a reta é de máxima inclinação (fig. 243), reta essa também definidora de um plano porque, pelo seu traço vertical V', só se poderá traçar, perpendicularmente à projeção vertical da reta, um único traço de plano.

Então resumindo, para se traçar por uma reta dada (r) um plano que a contenha, o problema torna-se indeterminado, pois, como vemos na fig. 244, pelo traço horizontal H pode-se traçar tantos traços horizontais de planos quantos se queira (βπ, γπ etc.)

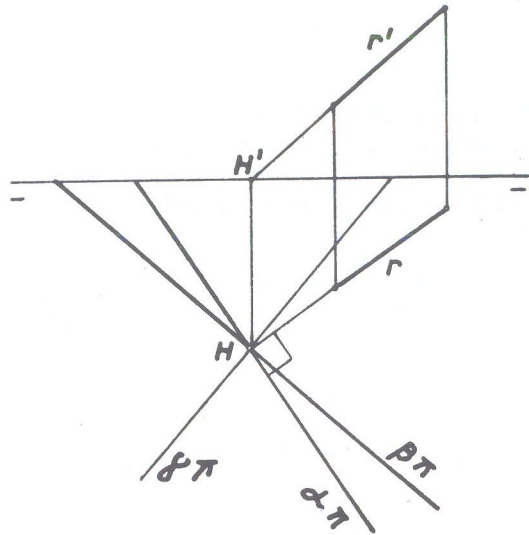



Fig.244

Mas, se a reta (r) for de máximo declive, então por H só um único traço de plano poderá ser traçado: é $\alpha\pi$, perpendicular à projeção r da reta. O traço vertical do plano passará pelo traço vertical da reta que deverá ser determinado.

Tudo o que acima foi exposto, refere-se a retas de máximo declive de um plano (qualquer) em relação ao plano horizontal de projeção. E a reta, de máximo declive (como também a de máxima inclinação) de um plano qualquer, será sempre uma reta também qualquer.

Se o plano for paralelo à linha de terra ou passar por essa linha, reta de máximo declive de qualquer um deles, em relação ao plano horizontal de projeção, será uma reta de perfil (figs. 245 e 246). (Também será de perfil a de máxima inclinação do plano da fig. 245).

As épuras respectivas, nesses casos, são as das figuras 247 e 248.

(vide figuras 245, 246, 247 e 248 na página seguinte)

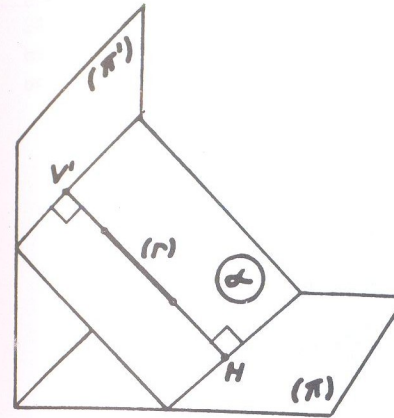



Fig.245

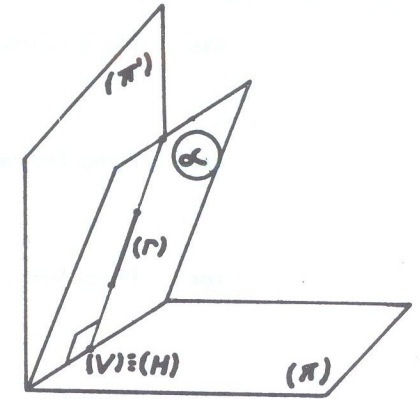



Fig.246

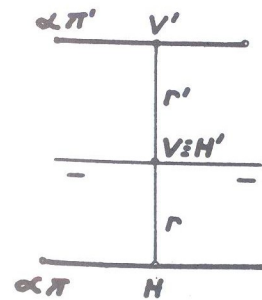



Fig.247

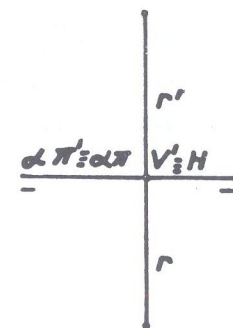



Fig.248

Tratando-se de planos projetantes (planos perpendiculares a qualquer dos planos de projeção) tem-se :

●●●	Plano Horizontal	Máximo declive: não há Máxima inclinação: reta de topo
●●●	Plano Frontal	Máximo declive: reta vertical Máxima inclinação: não há
●●●	Plano Vertical	Máximo declive: reta vertical Máxima inclinação: reta horizontc
●●●	Plano de Topo	Máximo declive: reta frontal Máxima inclinação: reta de topo
●●●	Plano de Perfil	Máximo declive: reta vertical Máxima inclinação: reta de topo

● Elementos geométricos que definem um plano

Os elementos que definem um plano são:

- ●●● duas retas concorrentes;
- ●●● duas retas paralelas;
- ●●● uma reta e um ponto (exterior a ela);
- ●●● três pontos não em linha reta.

Um plano sendo dado por duas retas concorrentes, já está definido, e, para se determinar seus traços, é suficiente achar os traços das retas. Unindo-se os dois traços verticais V' e V_1' das retas (r) e (s), tem-se o traço vertical $\alpha\pi'$ do plano; operando-se de modo idêntico com os traços horizontais H e H_1 das mesmas retas, tem-se o traço $\alpha\pi$ do plano. Esses dois traços têm em $T \equiv T'$ o seu ponto de concorrência sobre a linha de terra $\pi\pi'$.

Nem sempre entretanto, os traços das retas se apresentam como no caso da fig. 249. Pode ocorrer que os traços verticais por exemplo, se situem, um acima e outro abaixo da linha de terra, (ou ambos abaixo ou acima dessa linha), o mesmo acontecendo com os traços horizontais.

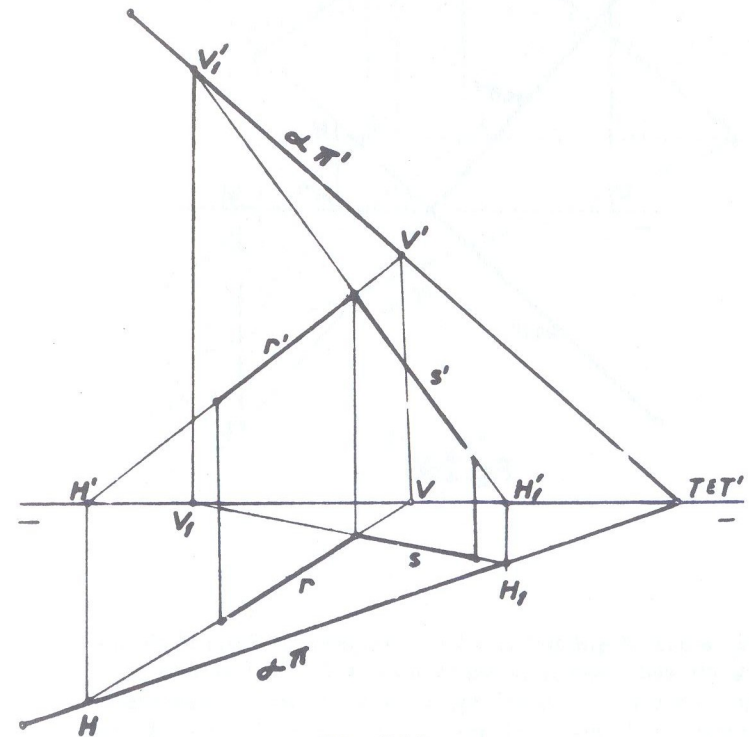



Fig. 249

Seja, como exemplo, a fig. 250, onde duas retas coplanares (não assinaladas na é pura) têm em V' e V'_1 seus traços verticais e em H e H_1, os traços horizontais.

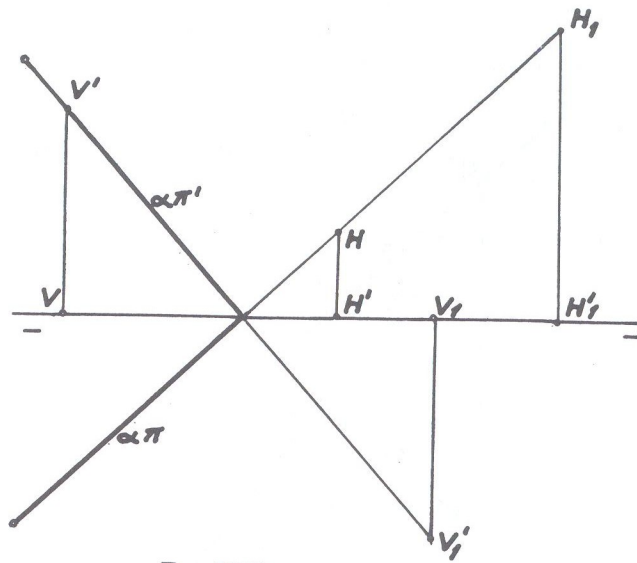



Fig. 250

Verifica-se que V' está acima e V'_1 está abaixo da linha de terra e os traços horizontais H e H_1 estão ambos acima daquela linha. Ao se unir $V'V'_1$ para a obtenção do traço vertical $\alpha\pi'$ do plano, só se considera o segmento acima da linha de terra do mesmo modo que, unindo-se HH_1 para a obtenção do traço horizontal $\alpha\pi$ do plano, só se considera o segmento abaixo da linha de terra. O plano é, pois, sempre representado na porção útil do 1º diedro.

Se o plano for dado por duas retas paralelas (fig. 251), é idêntico o modo de se achar os traços do plano. O traço vertical V' da reta (A)(B) é unido ao traço de mesmo nome V'_1 da reta (C)(D) que dá a conhecer o traço $\alpha\pi'$ do plano; o traço horizontal H da reta (A)(B) unido ao traço H_1 da reta (C)(D) fornece o traço horizontal $\alpha\pi$ do plano.

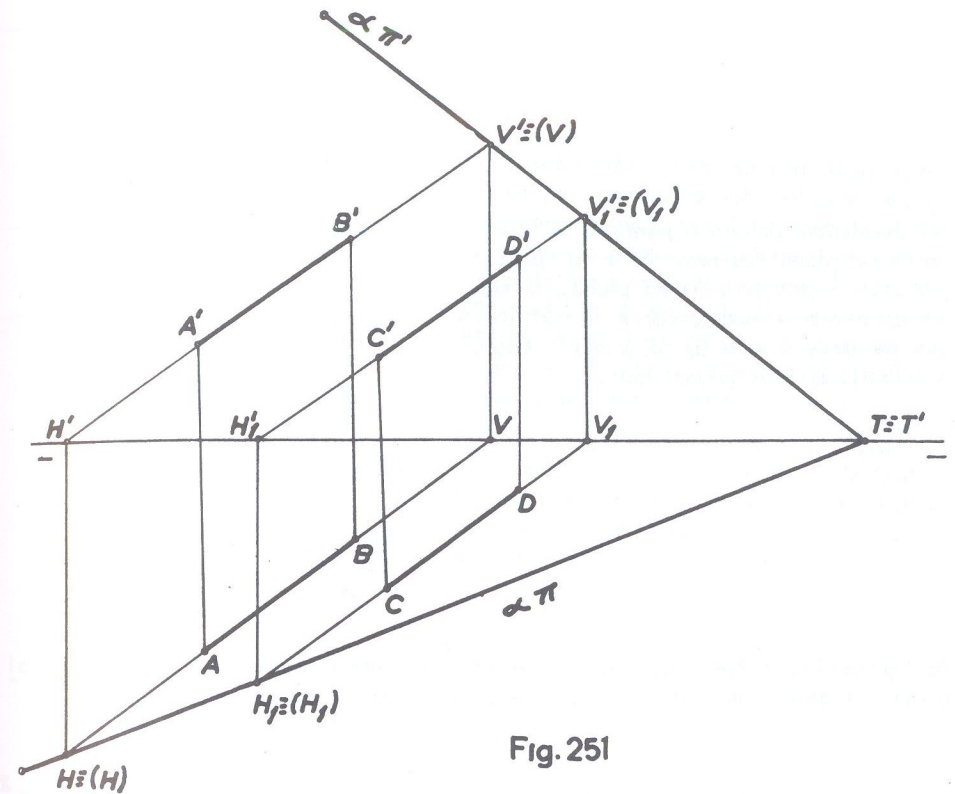



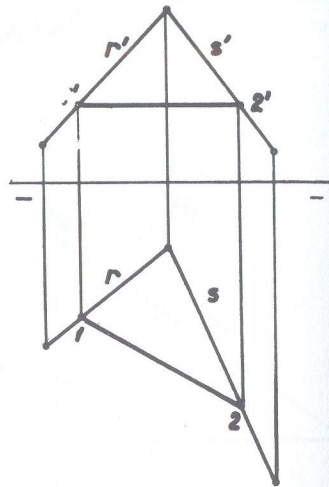
Fig. 251

Quando o plano for dado por três pontos não em linha reta, une-se as projeções correspondentes dos três pontos e recai-se no caso de duas retas concorrentes, o mesmo acontecendo quando o plano for dado por uma reta e um ponto exterior a ela.

- **Retas de planos não definidos por seus traços**

Seja, por exemplo, um plano definido por duas retas concorrentes (r) e (s), do qual se deseja uma horizontal (fig. 252). Tomam-se dois pontos quaisquer, um sobre cada uma das retas, ficando as projeções verticais 1'-2' numa paralela à linha de terra; unindo-se as projeções de mesmo nome 1 - 2 e 1'- 2', tem-se a horizon-

Fig 252

tal desejada, porque o ponto 1 - 1' pertence ao plano das retas (r) e (s) porque pertence a uma reta (r) do plano, o mesmo acontecendo com o ponto 2 - 2' porque pertence à reta (s) do plano. Logo, a reta (1)(2) é do plano dado.

As figuras 253 e 254 nos mostram respectivamente um frontal e uma reta qualquer de planos definidos por duas retas concorrentes e duas retas paralelas.

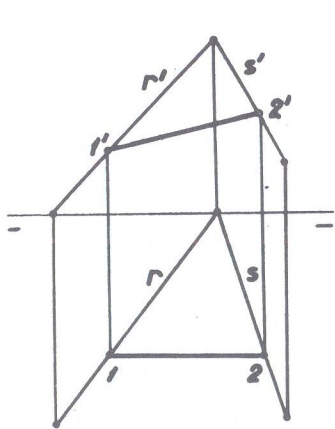



Fig. 253

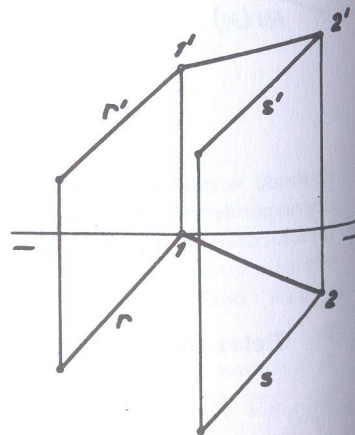



Fig. 254

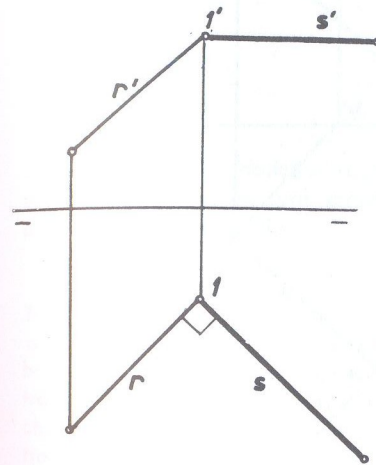



Fig. 255

Se a reta dada for de máximo declive, e, se desejar traçar uma horizontal, por exemplo, desse plano, não é necessário achar os traços do plano. É suficiente traçar a projeção horizontal da horizontal pedida, perpendicular à projeção de mesmo nome da reta dada (fig. 255) e, pelo ponto comum 1 - 1', traçar a projeção vertical paralela à linha de terra.

Em todos estes últimos casos, se forem determinados os traços dos planos definidos pelas retas, constata-se que a reta solução terá também seus traços sôbre os traços de mesmo nome do plano.

Seja agora determinar os traços de um plano definido pela sua reta de máximo declive, sem achar os traços da reta (fig. 256)

É suficiente traçar duas horizontais do plano e determinar os traços verticais dessas horizontais auxiliares os quais, unidos, nos fornecem o traço vertical do plano cujo traço horizontal terá que ser paralelo às projeções de mesmo nome das horizontais auxiliares. Como verificação, se forem determinados os traços da reta de máximo declive, se constatará que eles estarão sobre os traços correspondentes do plano.

Se for conhecido apenas um traço de um plano e as projeções de um ponto ou uma reta do plano, para se determinar o outro traço, procede-se do seguinte modo:

Seja, por exemplo (fig. 257), apenas conhecido o traço horizontal $\alpha\pi$ e as projeções AA' de um ponto (A) do plano. Traça-se pela projeção horizontal A a proje

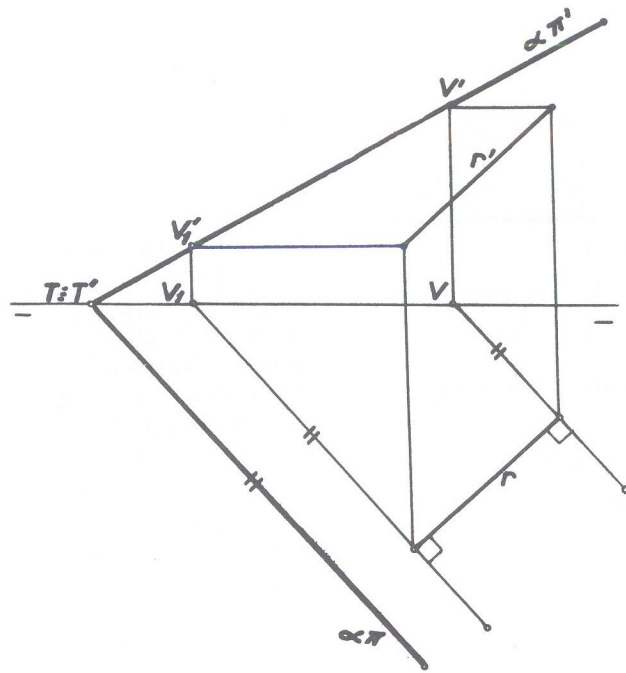
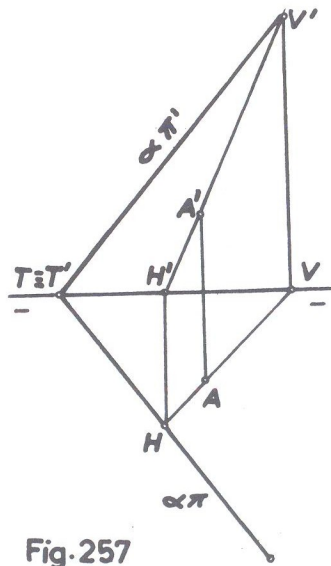



Fig.256

Fig.257

ção horizontal HV de uma reta qualquer, estando H sobre o traço απ e determina-se o traço vertical V' dessa reta, passando H'V' pela projeção A'.

Do ponto T ≡ T' conhecido (coincidência de απ com a linha de terra), traça-se o traço vertical απ' passando por V'.

Se forem conhecidas as projeções de uma reta, na situação particular de encontrarem a linha de terra no mes

mo ponto T ≡ T' do traço horizontal απ dado, para se determinar o traço vertical απ' emprega-se uma horizontal.

Seja, por exemplo, dado o traço απ e a reta (A)(B) pelas suas projeções na posição indicada na fig. 258.

Traça-se por B, paralelamente ao traço απ, a projeção horizontal de uma horizontal auxiliar, e tem-se BV; o traço vertical V' situa-se na linha de chamada que parte de V até o encontro com a paralela à linha de terra partindo da projeção vertical B'. Esse traço V' unido a A ≡ A' ou T ≡ T' faz conhecer o traço απ' pedido.

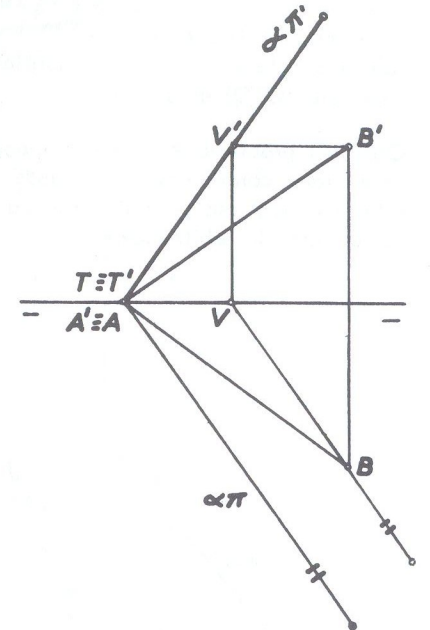



Fig.258

Paralelismo de retas e planos

Para facilidade do estudo, dividimos o assunto em grupos, a saber:

- 1º Grupo
  - a) reta paralela a plano
  - b) plano paralelo à reta
- 2º Grupo: plano paralelo a plano.

Estudando cada grupo separadamente, vem:

a) RETA PARALELA A PLANO

Uma reta é paralela a um plano quando é paralela a uma reta do plano. Assim,

para se traçar por um ponto (A) uma reta paralela a um plano (α) (fig.259) traça-se uma reta (C)(D) do plano e, pelo ponto dado, a reta (A)(B) paralela à reta (C)(D). A reta (A)(B) é paralela ao plano (α) por ser paralela a uma reta (C)(D) do plano.

Obs.: O problema é indeterminado, visto o plano conter uma infinidade de retas (r), (s), etc., sendo portanto (C)(D) tomada arbitrariamente.

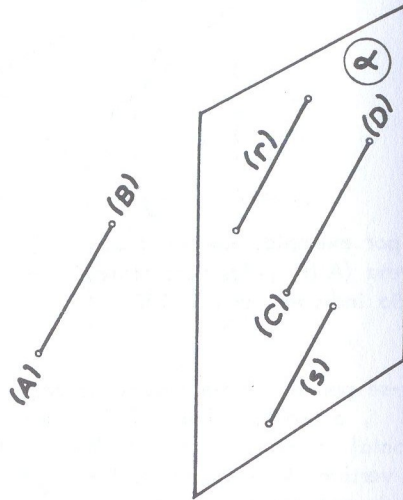



Fig. 259

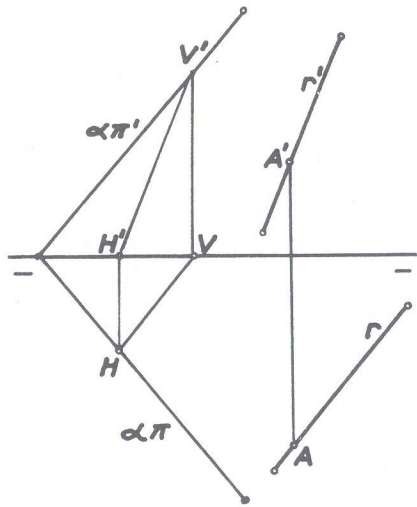



Fig. 260

Em épura (fig. 260), para se traçar por um ponto (A) uma reta paralela a um plano (α), traça-se uma reta qualquer (H)(V) do plano e, paralelamente a esta, pelo ponto dado, a reta pedida. A reta (r), sendo paralela à reta (H)(V) do plano, será paralela ao plano.

Se o plano não for dado pelos traços, o problema não oferece dificuldade, pois o método geral é também aplicado.

Seja a épura da fig. 261, o plano definido pelas retas concorrentes (r) e (s) e o ponto (M) dado pelas suas projeções.

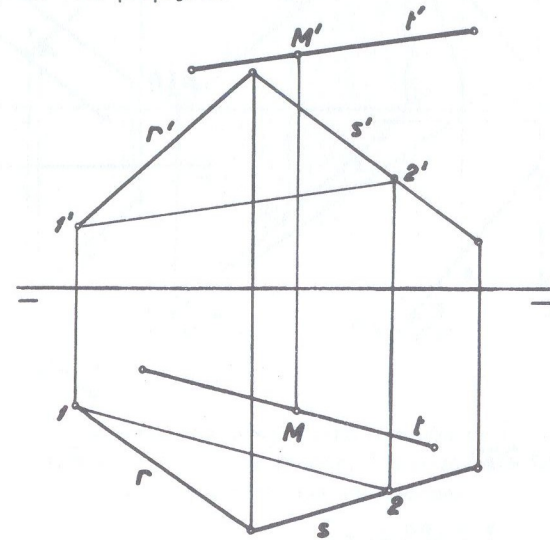



Fig. 261

Traçou-se uma reta auxiliar qualquer (1)(2) do plano e, pelas projeções do ponto (M), as projeções da reta (t) paralelas às projeções de mesmo nome da reta (1)(2).

Quando o plano for definido pela linha de terra e um ponto, e esse ponto possuir as projeções eqüidistantes da linha de terra, teremos o plano bissetor, resultando daí dois casos, conforme se trate do 1º ou 2º bissetor.

1º caso: Reta paralela ao (β_I)

O método geral é ainda aplicado. Uma reta pertence ao 1º bissetor, quando suas projeções são simétricas em relação à linha de terra e na qual se encontram em um mesmo ponto. Qualquer ponto que pertença à reta, terá cota e afastamento iguais porque será um ponto do bissetor.

Seja então o ponto (A) dado pelas projeções A e A', pelo qual se deseja traçar uma reta paralela ao 1º bissetor (fig.262) Para isso, traça-se uma reta qualquer (B)(C) que pertença ao 1º bissetor e pelo ponto dado (A) a reta (r) paralela àquela do bissetor.

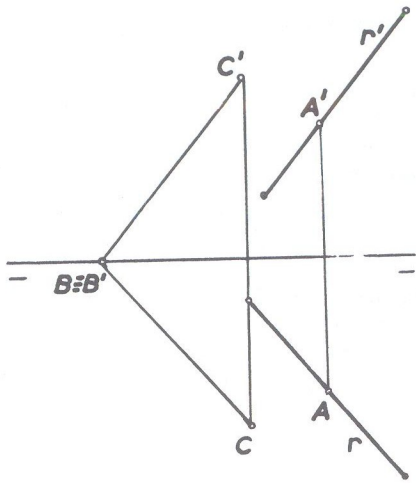
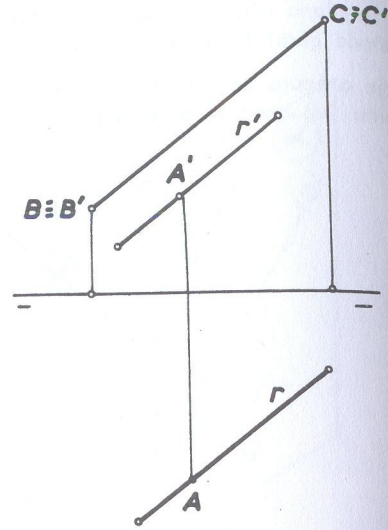



Fig. 262

Fig. 263

2º caso: Reta paralela ao (β_P)

Procede-se de maneira idêntica ao caso anterior traçando-se uma reta (B)(C) que pertença ao 2º bissetor e pelo ponto dado conduz-se a reta paralela à reta (B)(C).

A épura da fig. 263 nos mostra a reta (B)(C) do 2º bissetor e a reta (r) a ele paralela. Observa-se que uma reta do 2º bissetor é caracterizada por possuir suas projeções em coincidência (consideramos no caso a reta no 2º diedro mas poderia ser no 4º diedro) e a reta paralela ao 2º bissetor possui suas projeções paralelas entre si, isto é, projeção vertical paralela à projeção horizontal.

b) PLANO PARALELO À RETA

Para que um plano seja paralelo a uma reta, basta que ele contenha uma paralela a essa reta. É a recíproca do caso anterior.

Então para se traçar por um ponto (A) um plano paralelo a uma reta (r) dada, traça-se, pelo ponto dado, uma reta (s) paralela a reta dada e determina-se seus traços (fig. 264); qualquer plano que contiver a reta (s) será paralela a reta (r).

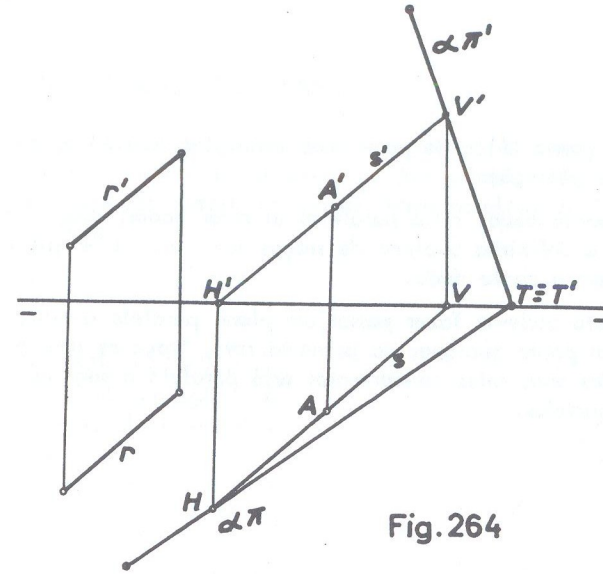



Fig. 264

Obs.: O problema é indeterminado porque uma reta não definindo um plano, pode-se fazer passar por ela, uma infinidade de planos. Na épura da fig. 264, o plano de traços $\alpha\pi$ e $\alpha\pi'$ é um dos muitos planos que solucionam o problema.

Ainda por um ponto dado, pode-se fazer passar um plano paralelo a duas retas não coplanares, isto é, retas não situadas no mesmo plano. Para isso, pelo ponto dado traçam-se retas paralelas às retas dadas e o plano dessas duas paralelas auxiliares é paralelo a cada uma das retas dadas.

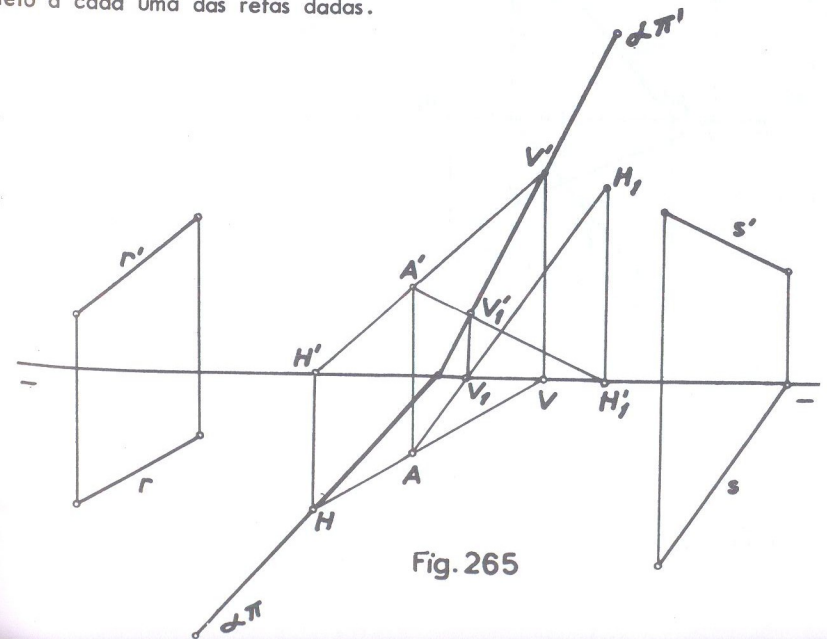



Fig. 265

Seja na fig. 265 o ponto (A) dado pelas suas projeções A e A' e as retas (r) e (s) também dadas pelas projeções.

Traçando-se, pelo ponto dado, retas paralelas às retas dadas, elas serão concorrentes por construção e definirão o plano de traços $\alpha\pi$ e $\alpha\pi'$ e que é paralelo às retas dadas e contém o ponto dado.

Também por uma reta pode-se fazer passar um plano paralelo a outra reta dada. Nesse caso, por um ponto qualquer da primeira reta, traça-se uma paralela à segunda e o plano das duas retas concorrentes será paralelo à segunda reta por conter uma de suas paralelas.

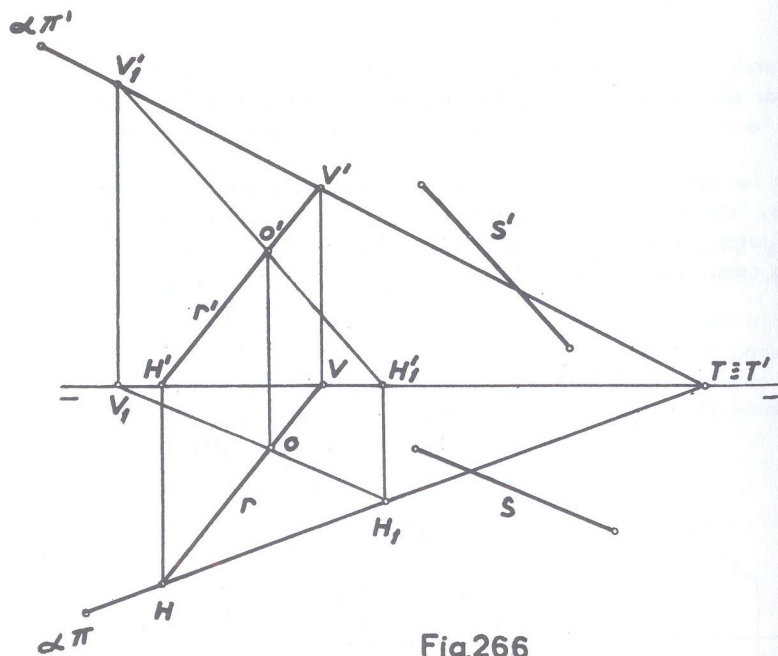



Fig.266

Na fig. 266, vemos um plano $\alpha\pi$, $\alpha\pi'$ traçado pela reta (r) dada e paralelo à reta (s) também dada.

2º Grupo: PLANO PARALELO A PLANO.

Dois planos são paralelos quando um deles contiver duas retas concorrentes paralelas ao outro. Então, quando isso ocorrer, os dois planos terão os traços de mesmo nome paralelos. (Exceção quando os planos forem paralelos à linha de terra, como veremos na fig. 268).

Seja, então (fig. 267), traçar por um ponto (A), dado pelas projeções A e A', um plano paralelo a um plano (α) dado pelos traços $\alpha\pi$ e $\alpha\pi'$. É suficiente traçar, pelo ponto dado, uma horizontal auxiliar, fazendo passar pela projeção A do ponto, a projeção AV da horizontal (paralela portanto ao traço $\alpha\pi$ do plano), e determinando-se o seu traço vertical V'. Tem-se assim a horizontal (A)(V) e por V' paralelamente ao traço $\alpha\pi'$ do plano dado, faz se passar o traço $\beta\pi'$ do plano pedido, cujo traço horizontal $\beta\pi$ será também paralelo ao traço $\alpha\pi$

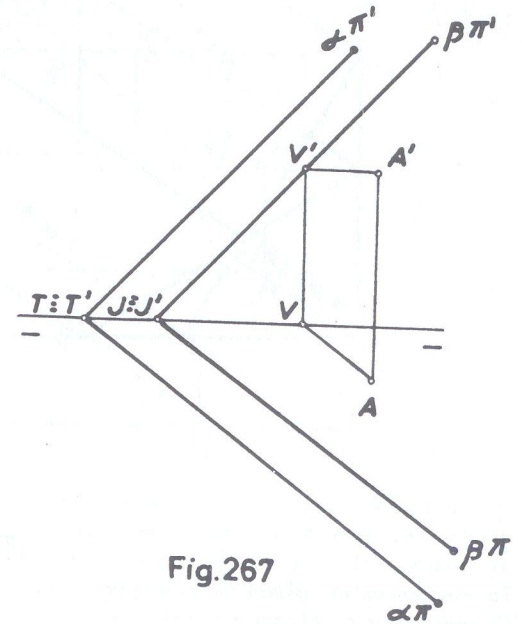



Fig.267

Quando dois planos forem paralelos à linha de terra, seus traços serão paralelos a essa linha; os planos, porém, podem se interceptar, como nos mostra a fig. 268.

Nessa figura, os planos (α) e (β) , paralelos à linha de terra $\pi\pi'$ se cortam segundo a frontohorizontal (A)(B).

Para que dois planos paralelos à linha de terra sejam paralelos entre sí, é suficiente que as interseções por um plano qualquer ou de perfil sejam paralelas.

Embora não tenhamos ainda estudado "interseção de planos" (capítulo a seguir), vamos aqui abordar este assunto para o caso em questão.

Sejam os planos (α) e (β) da fig. 269 que desejamos saber se são paralelos entre si ou não, e, no caso negativo, determinar sua interseção.

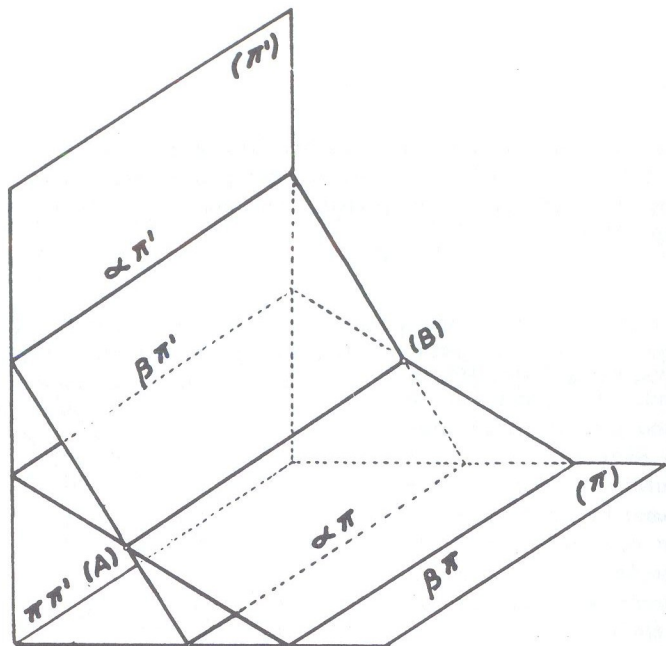



Fig.268

Faz-se passar um plano (γ) de perfil que corta os planos em 1-1' e 2-2' respectivamente. Rebatendo-se esse plano auxiliar de perfil, temos em 1_1-1' e 2_1-2' as suas interseções com os planos dados, as quais se cruzam em (I_1), determinando o não paralelismo dos planos dados.

Se 1_1-1' e 2_1-2' fossem paralelas, os planos dados também o seriam porque então não se interceptariam. Desfazendo-se o rebatimento do plano de perfil, teremos em I e I' as projeções por onde passam as projeções da frontohorizontal (r) que é a interseção entre eles.

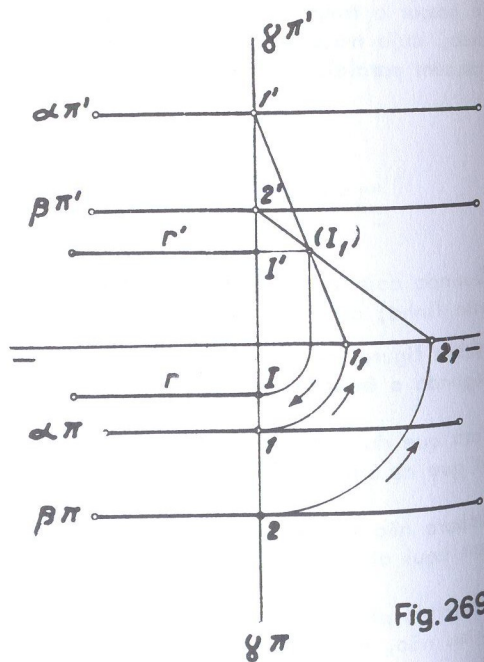



Fig.269

Seja traçar por um ponto dado (A) um plano paralelo a um plano (α) paralelo a linha de terra (fig. 270).

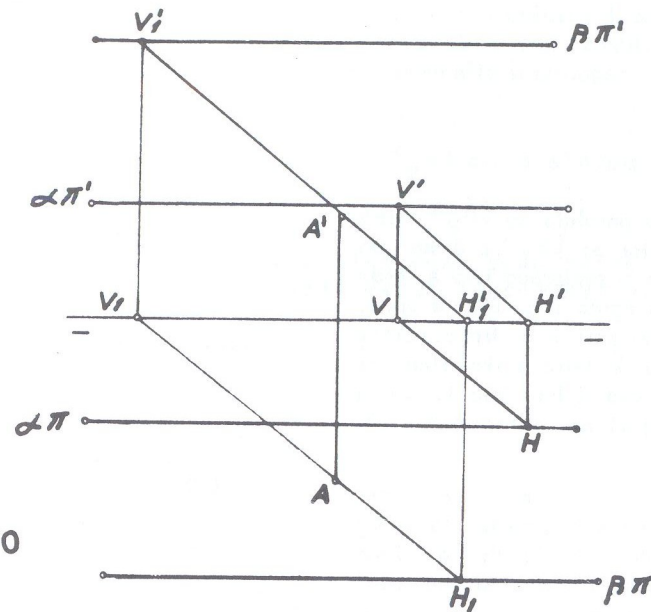



Fig.270

Traça-se uma reta qualquer (V)(H) que pertença ao plano (α), ou seja, que possua os traços sobre os traços correspondentes do plano. Pelo ponto dado (A), traça-se uma reta que seja paralela à reta (H)(V) e por cujos traços V_1' e H_1 passam os traços βπ' e βπ do plano (β) que é assim paralelo ao plano (α).

PLANOS PARALELOS AOS BISSETORES

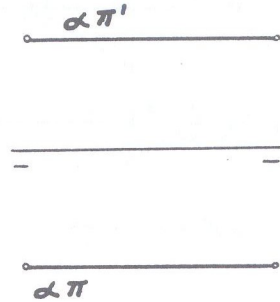
a) Plano paralelo ao (β_I)

Todo plano paralelo ao (β_I) será perpendicular ao (β_P) (a recíproca, porém, não é verdadeira). Seus traços, estarão em coincidência e serão paralelos à linha de terra, porque todo plano paralelo a qualquer dos bissetores é necessariamente paralelo à linha de terra (fig. 271). A cota do traço vertical do plano é igual e constante à diferença entre cota e afastamento de qualquer ponto do plano.

Fig.271

Quando em épura os traços coincidem acima da linha de terra (como na fig. 271), a diferença constante entre cota e afastamento de todos os pontos do plano é positiva, porque é positiva a cota do traço vertical do plano. Do mesmo modo, se os traços se situarem abaixo de $\pi\pi'$, por ser negativa a cota do traço vertical do plano, sera negativa a diferença entre cota e afastamento de todos os pontos do plano.

α) Plano paralelo ao (β_P)

Todo plano paralelo ao (β_P) será perpendicular ao (β_I) e como anteriormente a recíproca não é verdadeira. Sua épura (fig. 272) é caracterizada por possuir os traços paralelos à linha de terra e simétricos em relação a essa linha, isto é, cota de $\alpha\pi'$ igual ao afastamento de $\alpha\pi$

Nesse caso, a cota do traço vertical do plano e o afastamento do traço horizontal são iguais à soma da cota e do afastamento de qualquer ponto do plano.

$\alpha\pi'$

$\alpha\pi$

Fig. 272

Obs.: Na parte prática faremos exercícios considerando várias projeções de um ponto pertinente ao plano. No estudo de "perpendicularismo de planos" (Capítulo V), voltaremos aos planos paralelos aos bissetores.

A seguir, a parte prática do Capítulo III com numerosos exercícios.

• Exercícios referentes ao capítulo III

53 • Determinar os traços do plano (α) definido pela reta (A)(B) e pelo ponto (C).

(A) [2 ; 1 ; 3]

(B) [5 ; 3 ; 1]

(C) [6 ; 0 ; 2]

SOLUÇÃO: (fig. 273)

Unindo-se o ponto (C) à reta (A)(B) tem-se duas retas concorrentes em (B). Pelos traços dessas retas concorrentes, passam os traços do plano.

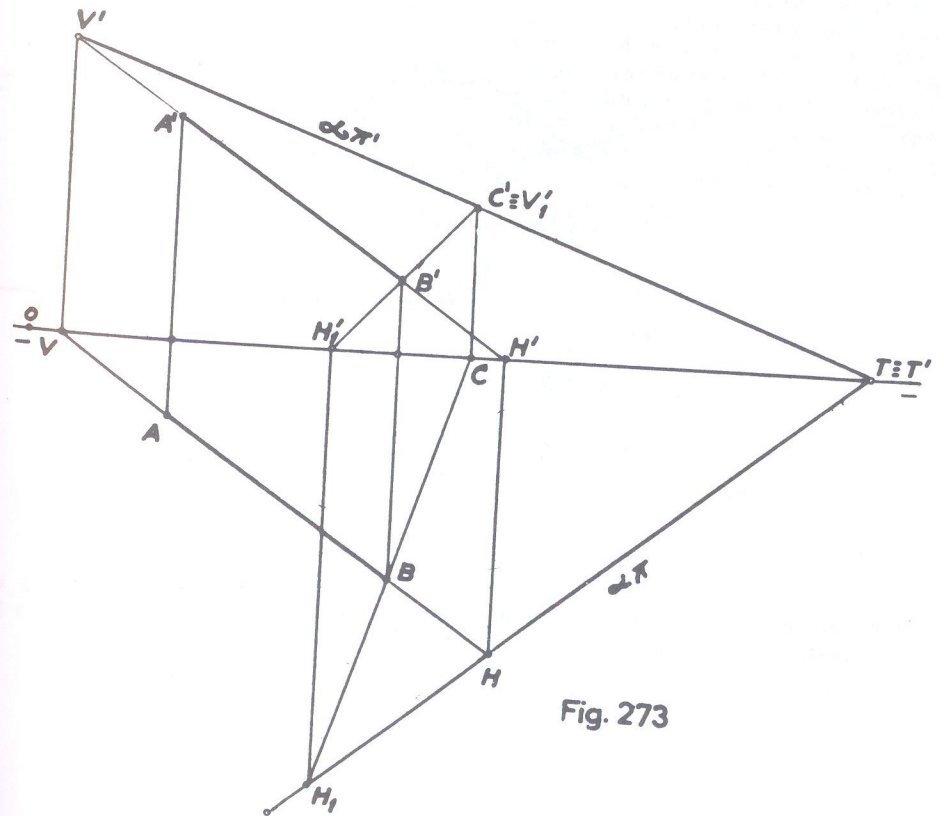



Fig. 273

54 • Determinar os traços de um plano do qual se conhecem uma reta frontohorizontal (A)(B) e um ponto (C).

(A) [1 ; 1 ; 2]
(B) [4 ; ? ; ?]
(C) [3,5 ; 2 ; 1]

SOLUÇÃO: (fig. 274)

Traça-se pelo ponto (C) uma reta qualquer auxiliar (C)(D) concorrente com a reta dada em (D) e determinam-se seus traços V' e H, por onde passarão os traços απ' e απ do plano pedido, que é paralelo a linha de terra.

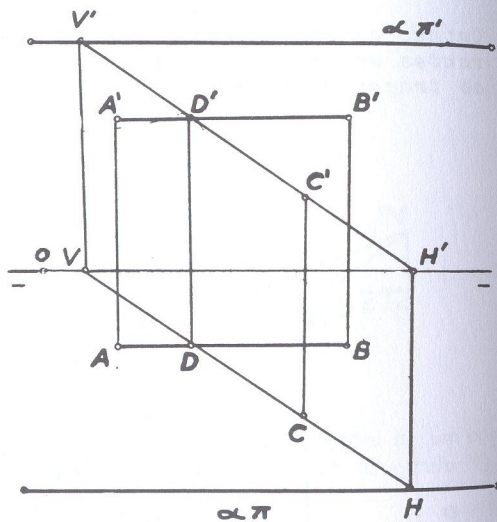



Fig.274

55 • Determinar os traços de um plano do qual se conhece uma reta (A)(B) e um ponto (C).

(A) [0 ; -0,5 ; 2,5]
(B) [3,5 ; -1,5 ; 0]
(C) [2 ; 2 ; -3]

SOLUÇÃO: (fig. 275)

Procede-se de modo inteiramente idêntico ao caso anterior. Unindo-se o ponto (C) à reta (A)(B), resultam duas retas concorrentes em (B), que são (A)(B) e (B)(C). Pelos traços verticais dessas retas, V' e V'1 passa o traço vertical απ' do plano e, como os traços horizontais coincidem com B, tem-se B ≡ H ≡ H1 . Então, para determinar o traço horizontal απ do plano, basta unir T ≡ T' a H ≡ H1 . (Só considerado os traços no 1º diedro).

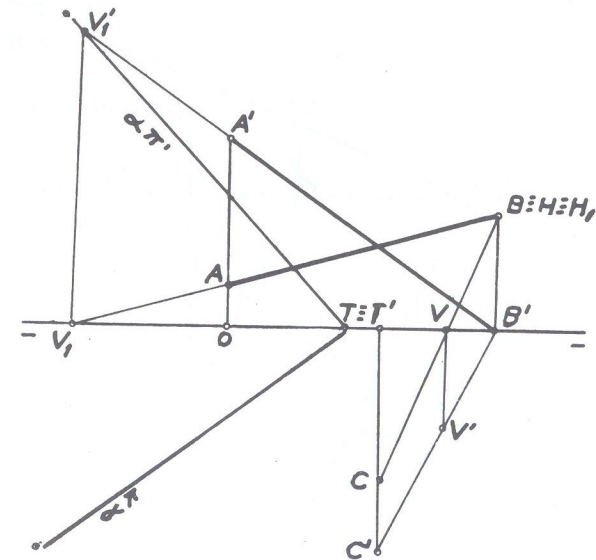



Fig.275

56 • Determinar os traços de um plano definido pela sua reta de máximo declive (A)(B), sem achar os traços da reta. O ponto (B) pertence ao (β_I).

(A) [0 ; 3 ; 1]
(B) [2 ; 2 ; ?]

SOLUÇÃO: (fig. 276)

Traçada a reta (A)(B) com o ponto (B) no bissetor do 1º diedro, determinam-se as horizontais auxiliares, cujas projeções horizontais são perpendiculares à projeção de mesmo nome da reta de máximo declive; unindo-se V'V'1 temos o traço vertical απ' do plano, cujo traço horizontal απ é paralelo às projeções horizontais das horizontais auxiliares.

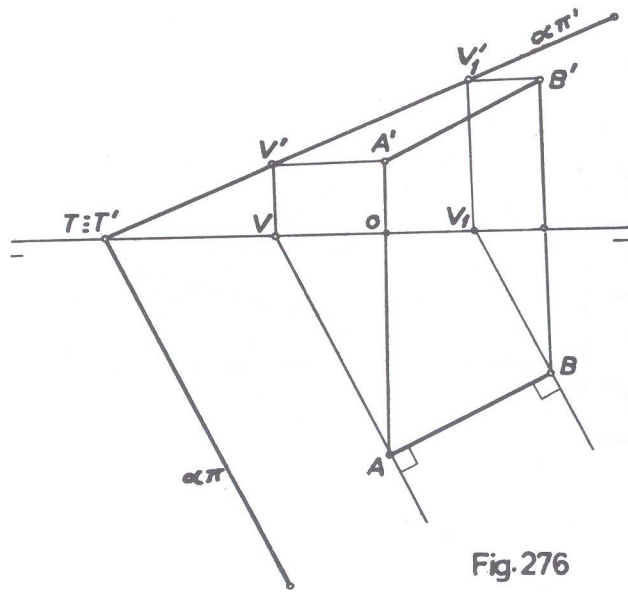



Fig.276

57• Um plano é definido por três pontos (A), (B) e (C). Pede-se:

a) os traços do plano;

b) uma frontal do plano que contenha o ponto (M).

(A) [0; 4; 1] (C) [5,5; 0; 1,5]

(B) [2; 1; 3] (M) [1; ?; 1]

SOLUÇÃO: (fig. 277)

item a: Como já vimos em exercícios anteriores, unindo-se os pontos dados teremos duas retas auxiliares concorrentes em (B), por cujos traços passam os traços correspondentes do plano.

item b: Do ponto (M) só é conhecida a cota; traça-se então pela projeção conhecida M', paralelamente ao traço vertical do plano, a projeção vertical r' da reta pedida, por ser frontal do plano e determina-se seu traço horizontal H_2 de onde se traça paralelamente a linha de terra, a sua projeção horizontal, onde se situa a projeção M obtida por uma linha de chamada de M'. Essa frontal (r) é do plano porque seu traço horizontal H_2 está sobre o traço correspondente do plano e contém o ponto (M).

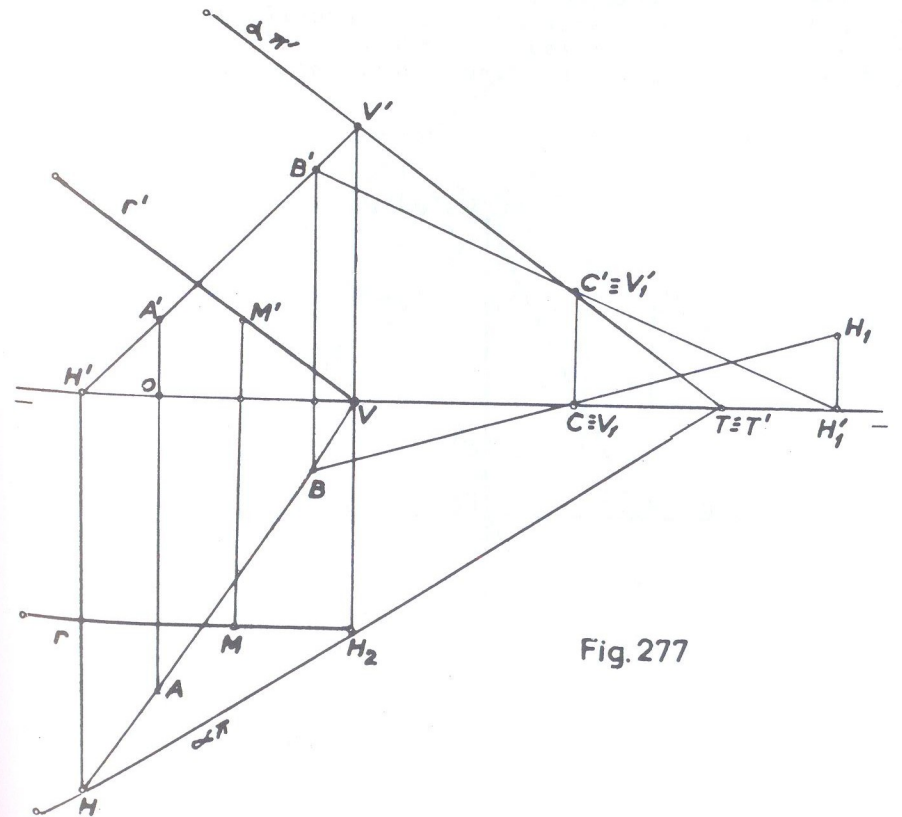



Fig. 277

58 • Determinar os traços de um plano dado por duas retas concorrentes, uma (A)(B) qualquer e outra (B)(C) de perfil, sem utilizar rebatimento.

(A) [1 ; 3 ; 0]

(B) [3 ; 0 ; 4]

(C) [? ; 1,5 ; 1]

SOLUÇÃO: (fig. 278)

Do ponto (C) não foi dada a abscissa; mas não precisava mesmo ser dada porque a reta (B)(C) é de perfil e portanto a abscissa de (C) é a mesma de (B). As duas retas são concorrentes em (B); mas como não se pode usar rebatimento, por exigência do problema, transforma-se o ponto de concorrência para (A) unindo-se AC e A'C' e tem-se assim a reta auxiliar (A)(C) da qual V'_1 é o seu traço vertical. Unindo-se $V'V'_1$ tem-se o traço $\alpha\pi'$ do plano pedido cujo traço horizontal $\alpha\pi$ passa por H.

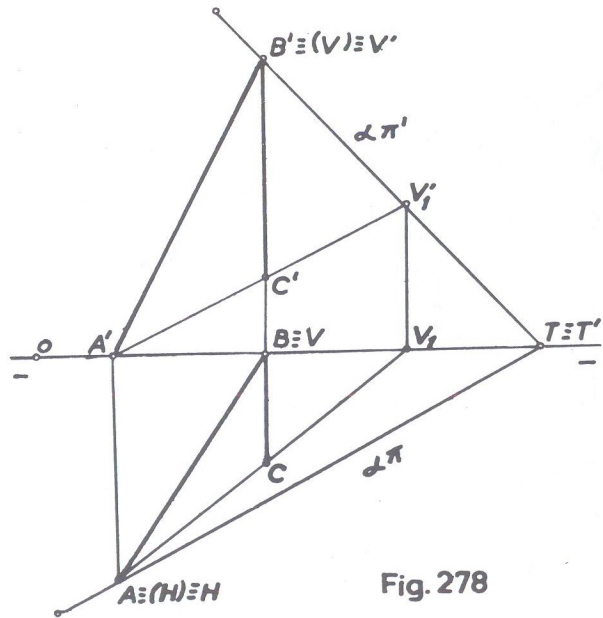



Fig. 278

59 • O mesmo exercício anterior, porém as retas que definem o plano estão na seguinte situação:

(A) [1,5 ; -2 ; 2]

(B) [4 ; -4 ; 4]

(C) [4 ; 2 ; 0,5]

SOLUÇÃO: (fig. 279)

Como no caso anterior, traçamos a reta auxiliar (A)(C) cujos traços são V'_1 e H_1. Quanto à reta (A)(B), como suas projeções coincidem, seus traços V' e H também coincidem em ππ'. Unindo-se $V'V'_1$ tem-se o traço $\alpha\pi'$ pedido e o traço $\alpha\pi$ é obtido unindo-se HH_1.

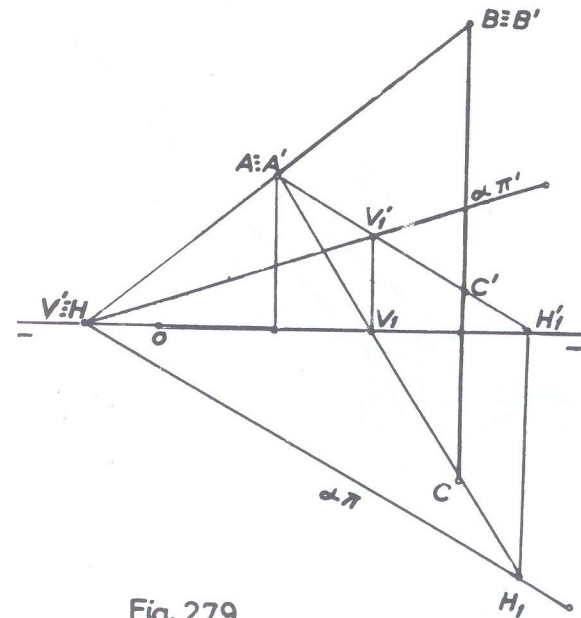



Fig. 279

60 • Determinar os traços de um plano dado por duas retas concorrentes (A)(B) e (C)(D), em que as duas projeções de cada uma delas coincidem com as projeções de nome contrário da outra.

(A) [2 ; 0 ; 0]

(B) [8 ; 3 ; 5]

(C) [3 ; ? ; ?]

(D) [6 ; ? ; ?]

SOLUÇÃO: (fig. 280)

Loca-se a reta (A)(B) dada pelas coordenadas dos pontos (A) e (B) e quanto à reta (C)(D) não oferece dificuldade a sua representação porque suas projeções estão em coincidência com as projeções de nome contrário de (A)(B).

Une-se um ponto qualquer, (B) por exemplo, de uma das retas a outro ponto qualquer, (C) por exemplo, da segunda reta, daí resultando a reta auxiliar (B)(C) por cujos traços passam os traços απ e απ' do plano, que estão em linha reta porque os traços da reta (A)(B) coincidem sobre ππ'

OBS. Como verificação, unindo-se em outro ponto (D) por exemplo da segunda reta, ao mesmo ponto (B), resultaria na reta auxiliar (B)(D) que terá seus traços sobre os traços correspondentes do plano.

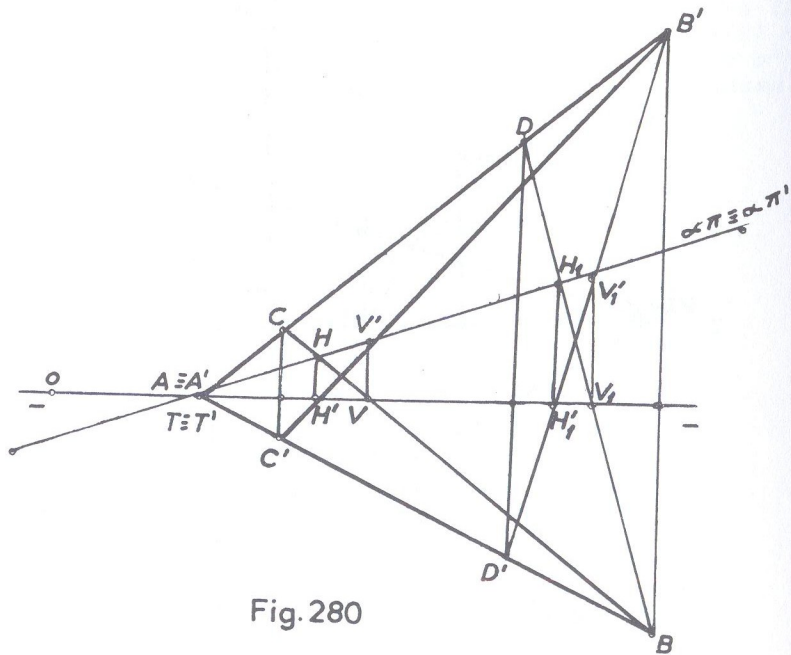



Fig. 280

61 • Dá-se um plano definido pela reta de perfil (A)(B) e pela projeção horizontal da reta de máximo declive (A)(C). Pede-se determinar:

a) os traços do plano; b) a projeção vertical da reta (A)(C)

(A) [1 ; 2 ; 3] (B) [1 ; 4 ; 1] (C) [3 ; 3 ; ?]

SOLUÇÃO: (fig. 281)

item a: Rebate-se o plano de perfil que contém a reta (A)(B), cujos traços são V' e H (para se obter o traço horizontal H, desfaz-se o rebatimento como já sabemos). Por H, perpendicularmente à projeção conhecida AC, faz-se passar o traço horizontal απ do plano pedido, cujo traço vertical απ' passará por V'.

item b: Se a reta (A)(C) é do plano, seu traço horizontal H_1 deverá estar sobre o traço correspondente do plano; logo, na interseção απ com AC, teremos H_1 que é o traço horizontal da reta de máximo declive, e daí, por uma linha de chamada, determina-se H_1' sobre a linha de terra. Unindo-se $A'H_1'$ teremos a projeção vertical C' sobre a mesma linha de chamada em que está a projeção C e portanto A'C' é a projeção vertical pedida.

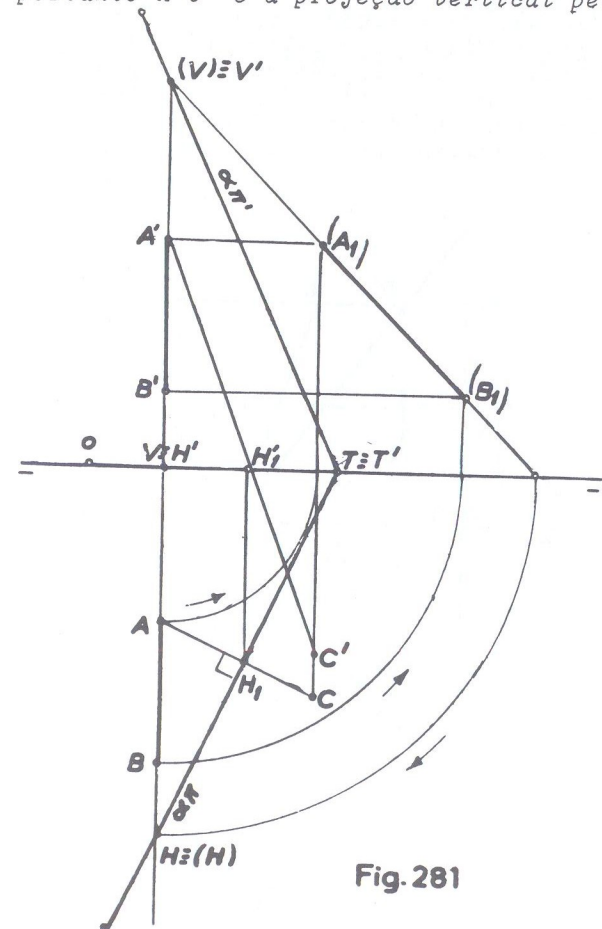



Fig. 281

62 • Traçar uma reta de máximo declive de um plano (A)(B)(C), sem determinar os traços do plano.

(A) [0 ; 3 ; 4]
(B) [3 ; 1 ; 0]
(C) [5 ; 4,5 ; 3]

SOLUÇÃO: (fig. 282)

Locados os pontos dados, têm-se as retas auxiliares (A)(B) e (B)(C) concorrentes em (B), e que definem o plano cujos traços não podem ser determinados por exigência do problema. Traça-se então uma horizontal auxiliar (C)(D) do plano dado e como a reta de máximo declive tem sua projeção horizontal perpendicular à projeção horizontal de qualquer horizontal do plano, traça-se BE perpendicular a CD e tem-se E' sobre C'D'. A reta (B)(E) é de máximo declive do plano dado.

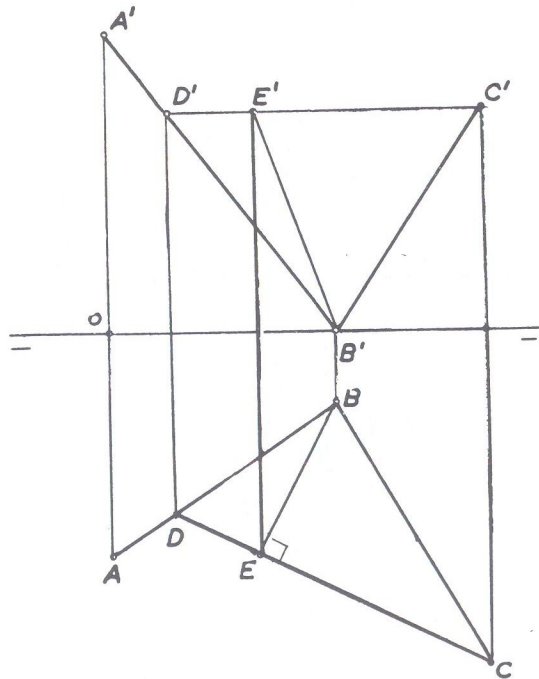



Fig.282

63 • O mesmo exercício anterior, com os pontos (A), (B) e (C) nas seguintes posições:

(A) [0 ; 2 ; 4]
(B) [3 ; 5 ; -3]
(C) [5 ; -2,5 ; 1]

SOLUÇÃO: (fig. 283)

Locados os pontos, procede-se de modo inteiramente idêntico ao caso anterior, aparentando dificuldade pela situação dos pontos. Traçou-se a horizontal auxiliar (C)(D) e por B (projeção horizontal do ponto de concorrência), traçou-se BE perpendicular à projeção horizontal CD da horizontal (C)(D). Determinado E, por uma linha de chamada tem-se E' sobre C'D' (seu prolongamento) e (B)(E) é a reta pedida.

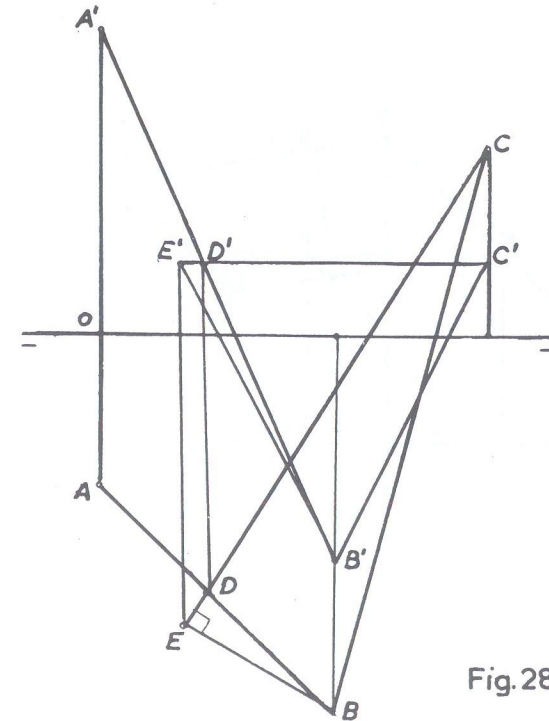



Fig.283

64 • Traçar uma reta de máxima inclinação de um plano definido por duas retas paralelas (A)(B) e (C)(D), sem determinar os traços do plano.

(A) [0 ; 4 ; 1]   (C) [5 ; 3 ; 2]

(B) [3 ; 2 ; 4]   (D) [8 ; ? ; ?]

SOLUÇÃO: (fig. 284)

Locadas as retas paralelas, traça-se uma frontal auxiliar do plano, (C)(F) por exemplo, em que a projeção CF é paralela a linha de terra e a seguir outra frontal (B)(E).
Evidentemente, as projeções verticais das frontais são paralelas e qualquer reta do plano cuja projeção vertical for perpendicular às projeções verticais das frontais, será uma reta de máxima inclinação do plano. Traça-se então 1'2' perpendicular às projeções B'E' e C'F' e, por linhas de chamada se terá 1 sobre CF e 2 sobre BE. A reta (1)(2) é de máxima inclinação do plano dado.

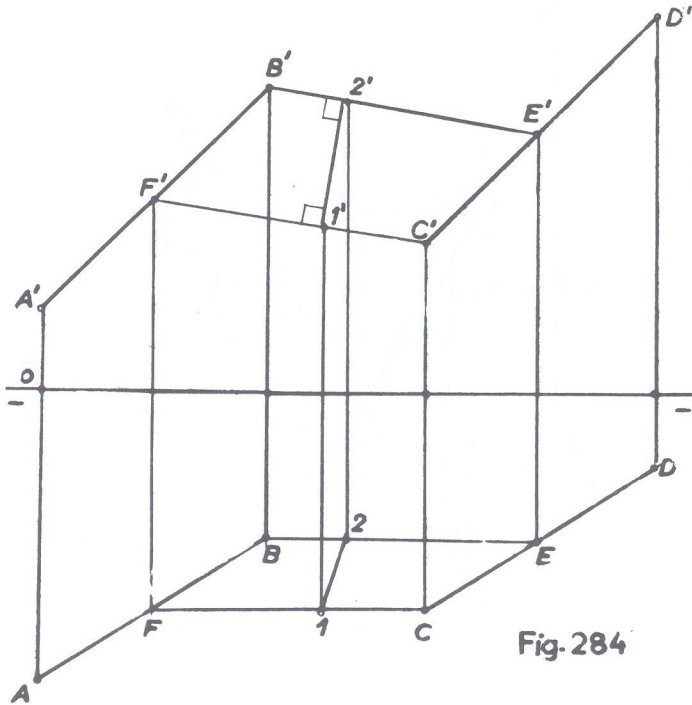



Fig-284

65 • Mesmo exercício anterior mas com as retas (A)(B) e (C)(D) na seguinte situação:

(A) [-3 ; -1 ; 3]   (C) [0 ; 1 ; 2]

(B) [3 ; 1,5 ; -2]   (D) [4,5 ; ? ; ?]

SOLUÇÃO: (fig. 285)

Procede-se de modo análogo ao exercício anterior e a épura aparenta dificuldade pela situação das retas.
Traça-se uma frontal auxiliar (B)(F) onde o ponto (F) é tomado arbitrariamente. A projeção horizontal dessa frontal passando por B corta a projeção CD em E que faz conhecer E' sobre C'D' e unindo-se B'E' tem-se F' na linha de chamada levantada por F. Uma segunda frontal auxiliar de projeção horizontal MD corta a projeção AB no seu prolongamento em G que dá G' no prolongamento de A'B'. Como as projeções verticais das frontais auxiliares evidentemente são paralelas, basta traçar F'M' perpendicular a essas projeções verticais e a reta (F)(M) é a solução.

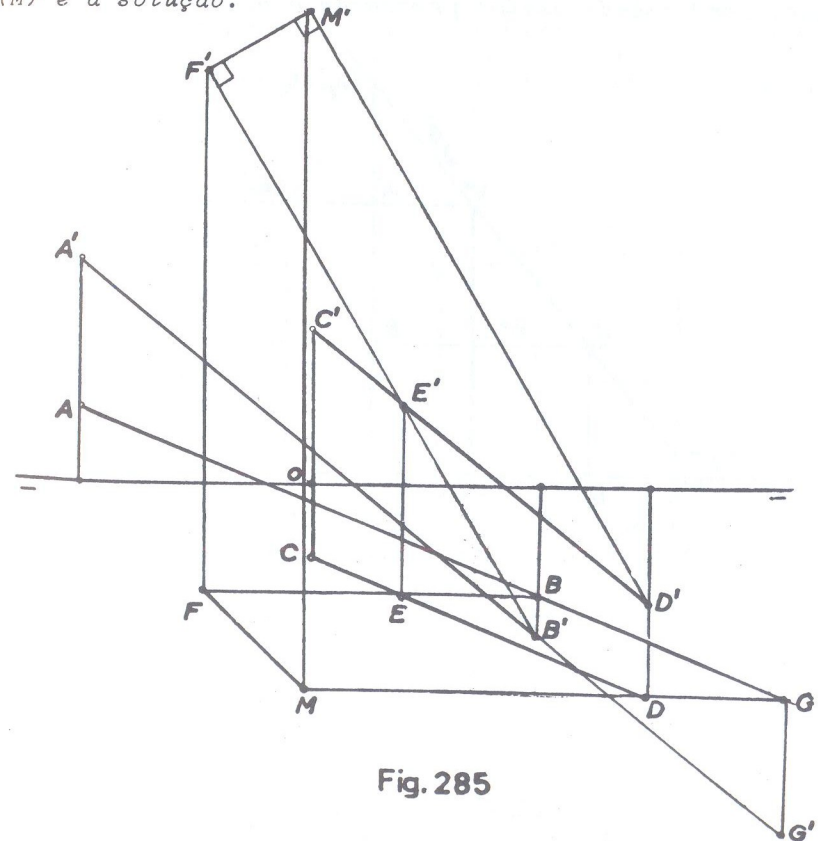



Fig. 285

66 • Determinar uma reta de perfil que pertença a um plano (α), que contém o ponto (T)

(T) [0 ; 0 ; 0]

$\widehat{\alpha\pi'} = +50^\circ$

$\widehat{\alpha\pi} = -40^\circ$

SOLUÇÃO: (fig. 286)

Os traços do plano são determinados da forma como foi explicado na fig. 185. Traçam-se duas retas horizontais auxiliares do plano, (r) e (s), e sobre cada uma delas marcam-se os pontos (A) e (B) que estejam numa mesma perpendicular a linha de terra. Essa reta (A)(B) é de perfil e pertence ao plano dado porque seus dois pontos (A) e (B) pertencem ao plano por pertencerem à retas do plano.
Como verificação, feito o rebatimento do plano de perfil que contém a reta solução, verifica-se que $(A_1)(B_1)$ tem seu traço vertical sobre o correspondente do plano e, desfeito o rebatimento, também o traço horizontal acha-se sobre o horizontal do plano, confirmando assim pertencer a reta (A)(B) ao plano dado.

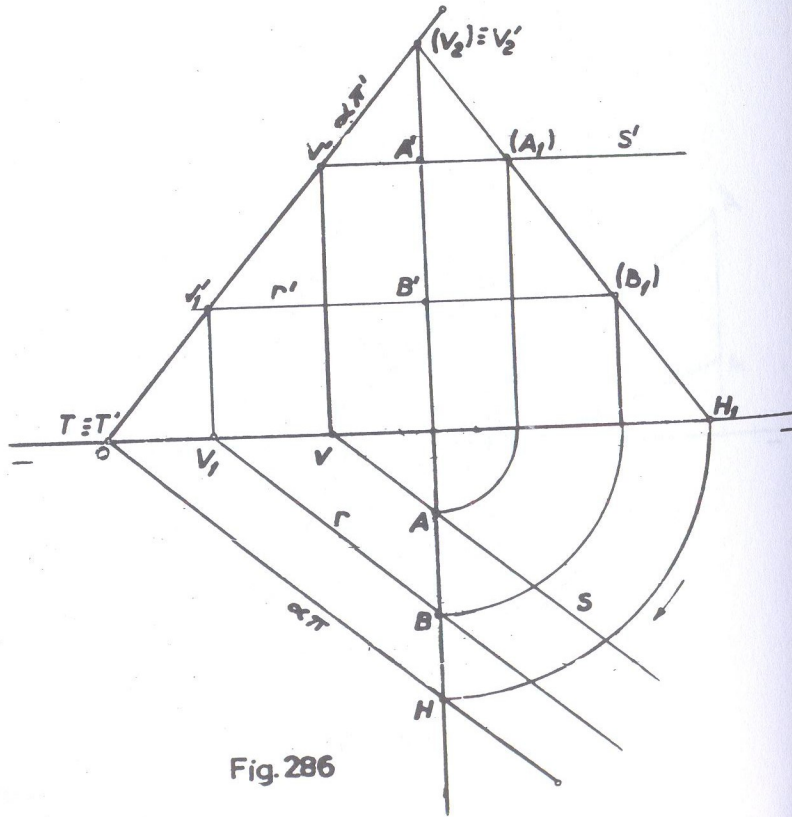



Fig.286

67 • Dada uma reta (A)(B) determinar um ponto (C) da reta que tenha o afastamento igual a três vêzes a cota.

(A) [1 ; 4,5 ; 1]

(B) [5 ; 2 ; 2,5]

SOLUÇÃO: (fig. 287)

Queremos determinar as projeções de um ponto da reta, que possua cota e afastamento em uma razão dada (no caso 1/3).
O lugar geométrico dos pontos que possuem cota e afastamento numa razão dada, é um plano definido pela linha de terra e um ponto que mantenha a mesma razão. Então, toma-se arbitrariamente o ponto D', que é a projeção vertical de um ponto (D) objetivo, sôbre a projeção vertical A'B' da reta dada e, sôbre a linha de chamada desse ponto, marca-se o afastamento igual a três vezes a cota e tem-se D.
A reta (E)(D) do plano definido pela linha de terra e ponto (D) possui todos os seus pontos na razão 1/3. A interseção das projeções horizontais AB e ED nos fornece a projeção horizontal C do ponto pedido, cuja projeção vertical C' estará sôbre A'B'. Assim o ponto (C) pertence à reta (A)(B) e satisfaz ao problema.

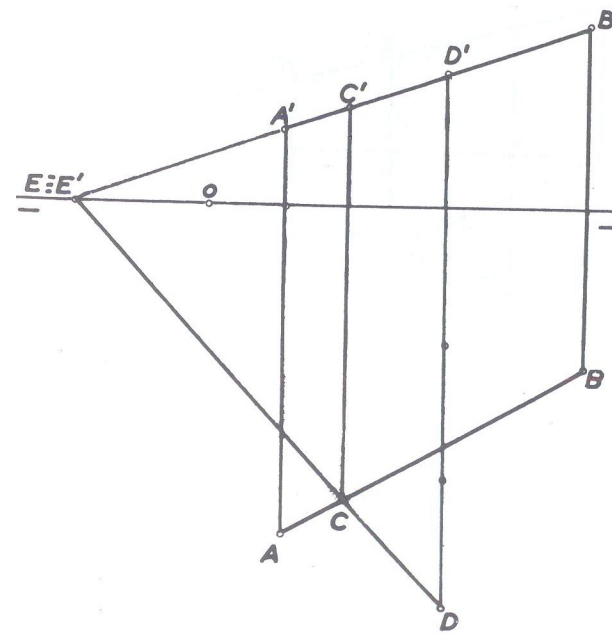



Fig.287

68 • Determinar um ponto da reta (A)(B) que pertence ao (β_I)

(A) [1 ; 0 ; 2]

(B) [5 ; 2 ; 1]

SOLUÇÃO: (fig. 288)

Nesse caso, a razão é 1, pois cota e afastamento do ponto pedido são iguais.
Procede-se de maneira análoga ao exercício anterior, tomando-se um ponto D' em qualquer parte de A'B' e determinando-se a projeção horizontal D de modo a que (D) se situe no primeiro bissetor. A interseção AB com DE é o ponto C que faz conhecer C' sobre A'B'. O ponto (C) é a solução

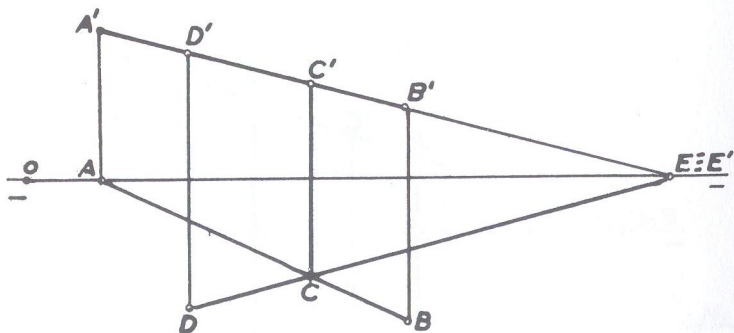



Fig.288

69 • O mesmo exercício anterior com a reta (A)(B) na seguinte situação:

(A) [2 ; -3 ; -1]

(B) [6 ; 0 ; -3,5]

SOLUÇÃO: (fig. 289)

De maneira idêntica ao exercício anterior, tem-se em (C) o ponto pedido.

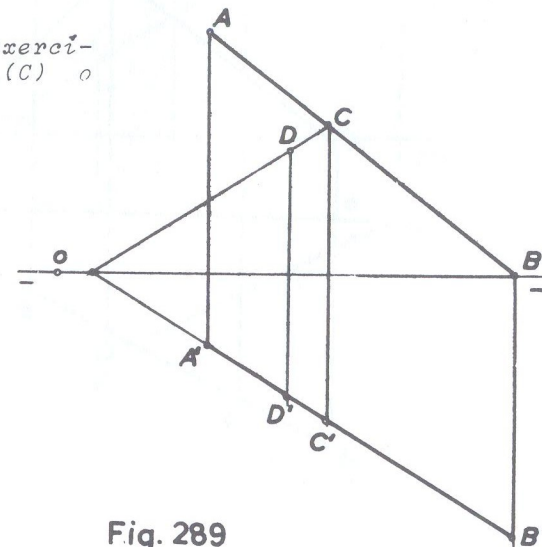



Fig. 289

70 • Determinar sobre uma reta (A)(B) um ponto cuja razão entre cota e afastamento seja igual a 2.

(A) [0 ; 3 ; 1]

(B) [4 ; 1 ; 4]

SOLUÇÃO: (fig. 290)

Se a relação entre cota e afastamento é 2, temos que $z/y = 2$ ou $z = 2y$, isto é, cota z igual a duas vezes o afastamento y. Procede-se então de modo idêntico aos últimos exercícios, tomando-se arbitrariamente um ponto D sobre AB e marcando-se a cota igual ao dobro desse afastamento. As projeções verticais A'B' e D'E' se interceptam em C' que faz conhecer C sobre AB. O ponto (C) da reta (A)(B) está na razão pedida (cota dupla do afastamento).

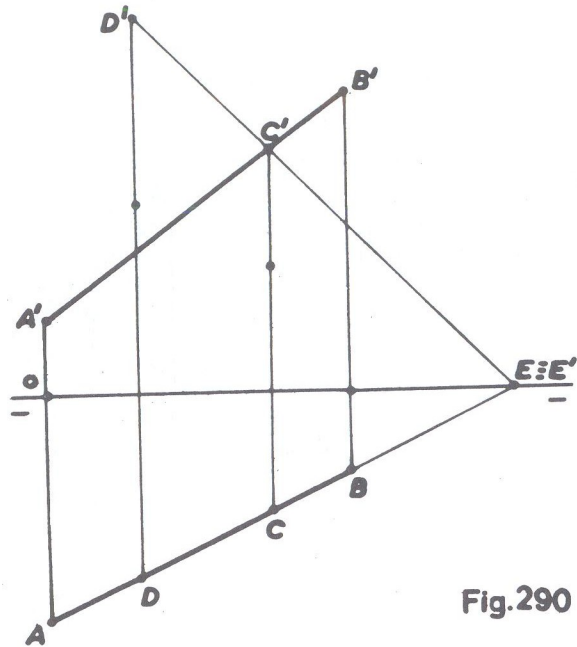



Fig.290

71 • Determinar sobre a reta (A)(B) um ponto cuja relação entre afastamento e cota seja igual a -3 .

(A) [1 ; 3 ; 1]

(B) [5 ; 1 ; 3,5]

SOLUÇÃO: (fig. 291)

A relação será pois y/z = -3 ou y = -3z o que significa afastamento y igual a três vezes a cota z, mas, de sinal contrário, isto é, afastamento positivo e cota negativa (podendo ser também afastamento negativo e cota positiva).
Marca-se arbitrariamente o ponto D' (cota) sobre A'B' e toma se o afastamento D (negativo) igual a três vezes a cota. Unindo-se D a E e prolongando-se até a projeção AB (no caso o prolongamento de AB) tem-se a projeção C que, por uma linha de chamada faz conhecer C' sobre o prolongamento de A'B'. O ponto (C) está na razão dada (afastamento positivo igual a três vezes a cota negativa).

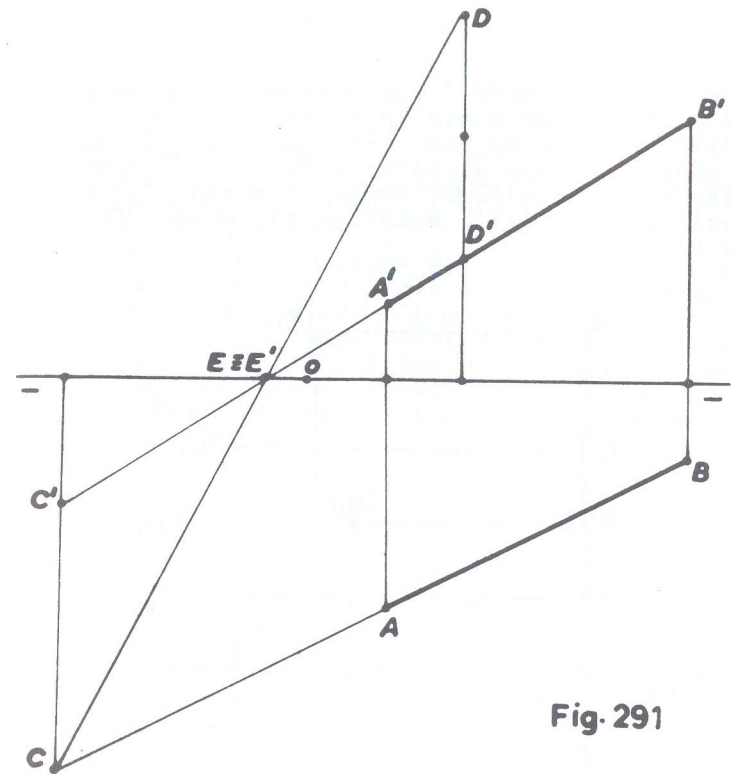



Fig. 291

72 • Determinar sobre a reta de perfil (A)(B) um ponto que possua cota e afastamento na relação 2/3.

(A) [0 ; 3,5 ; 4,5]

(B) [0 ; 6 ; 1]

SOLUÇÃO: (fig. 292)

Locada a reta na épura, marca-se na mesma linha de chamada, um ponto (M) que satisfaça a relação, isto é, duas unidades para a cota e três unidades para o afastamento. Feito isso, re

bate-se o plano de perfil que contém a reta dada e tem-se $(A_1)(B_1)$ e (M_1). Esse ponto (M_1) une-se ao ponto de interseção da linha de chamada que contém a reta dada com a linha de terra e qualquer ponto dessa reta $O(M_1)$ terá sempre cota e afastamento na relação dada. Assim, o ponto (C_1) sobre $(A_1)(B_1)$ é a solução e, desfeito o rebatimento, tem-se (C) pelas projeções C e C'.

Fig.292

73 • Determinar os traços de um plano (α), concorrentes em ππ' e simétricos a essa linha e que contém a reta (A)(B).

(T) [? ; 0 ; 0]

(A) [0 ; -4 ; 1]

(B) [5 ; -1 ; 3]

SOLUÇÃO: (fig. 293)

Locada a reta dada, o aluno poderá ficar embaraçado para traçar o plano, porque já sabe que uma reta só não define o plano; mas o plano possui os traços simétricos à linha de terra, onde concorrem num mesmo ponto.

Como cada um dos traços do plano é o lugar geométrico dos simétricos do outro traço em relação à linha de terra, obtém-se o traço horizontal απ unindo o traço horizontal (H) da reta ao simétrico V_1' do traço vertical (V). Assim, $VV_1' = VV'$ e, da mesma forma, para se obter o traço vertical απ', uniu-se do traço vertical V' da reta ao simétrico H_1 do traço horizontal (H), tudo em relação à linha de terra. Os traços pedidos são, pois, απ e απ'.

Fig.293

74 • Mesmo exercício anterior, onde a reta (A)(B) possui o ponto (A) no (β_P) e o ponto (B) no (β_I).

(A) [2 ; -1 ; ?]

(B) [6 ; ? ; -4]

SOLUÇÃO: (fig. 294)

Do ponto (A) não é conhecida a cota; mas estando ele no (β_P) facilmente é traçada sua épura (ponto no 2º diedro), o mesmo acontecendo com o ponto (B) do qual não é conhecido o afastamento, mas que está no (β_I) do 3º diedro em virtude da cota ser negativa. Procedendo-se tal como no exercício anterior, $\alpha\pi$ e $\alpha\pi'$ são os traços pedidos.

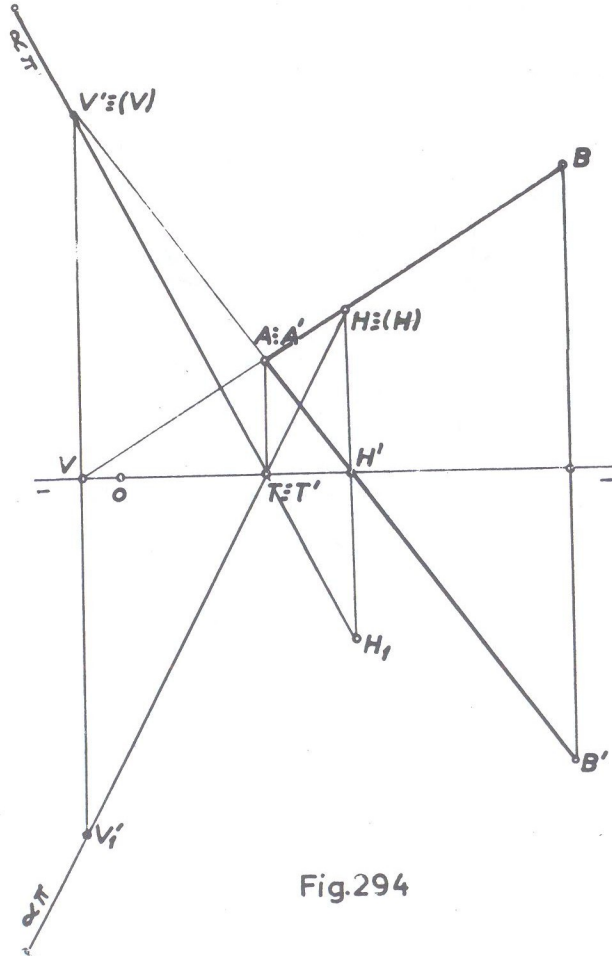



Fig.294

75 • Determinar os traços de um plano definido pelas retas (A)(B) e (C)(D). O ponto (D) está sobre uma reta de perfil (M)(N) e (C) deve ser tomado sobre (A)(B) em um ponto cujo afastamento seja igual a três vezes a cota.

(A) [5 ; 1 ; 2] (D) [12 ; ? ; -5,7]

(B) [9 ; 4,5 ; 5] (M) [12 ; -2,5 ; 1]

(N) [? ; 0 ; -1,5]

SOLUÇÃO: (fig. 295)

Locados todos os pontos dados, rebate-se o plano de perfil que contém a reta (M)(N) e obtém-se $(M_1)(N_1)$. Se o ponto (D) está sobre (M)(N), traça-se por D' (projeção conhecida) a paralela à linha de terra até encontrar o prolongamento de $(M_1)(N_1)$ e obtém-se $_1$ que faz conhecer a projeção horizontal D.
Para se determinar o ponto (C), procede-se exatamente como no exercício 67 (fig. 287) e teremos a reta (C)(D) pelas suas projeções CD e C'D'. Pelos traços das retas (A)(B) e (C)(D) passam os traços $\alpha\pi$ e $\alpha\pi'$ pedidos.

VIDE FIGURA 295 NA PÁGINA SEGUINTE

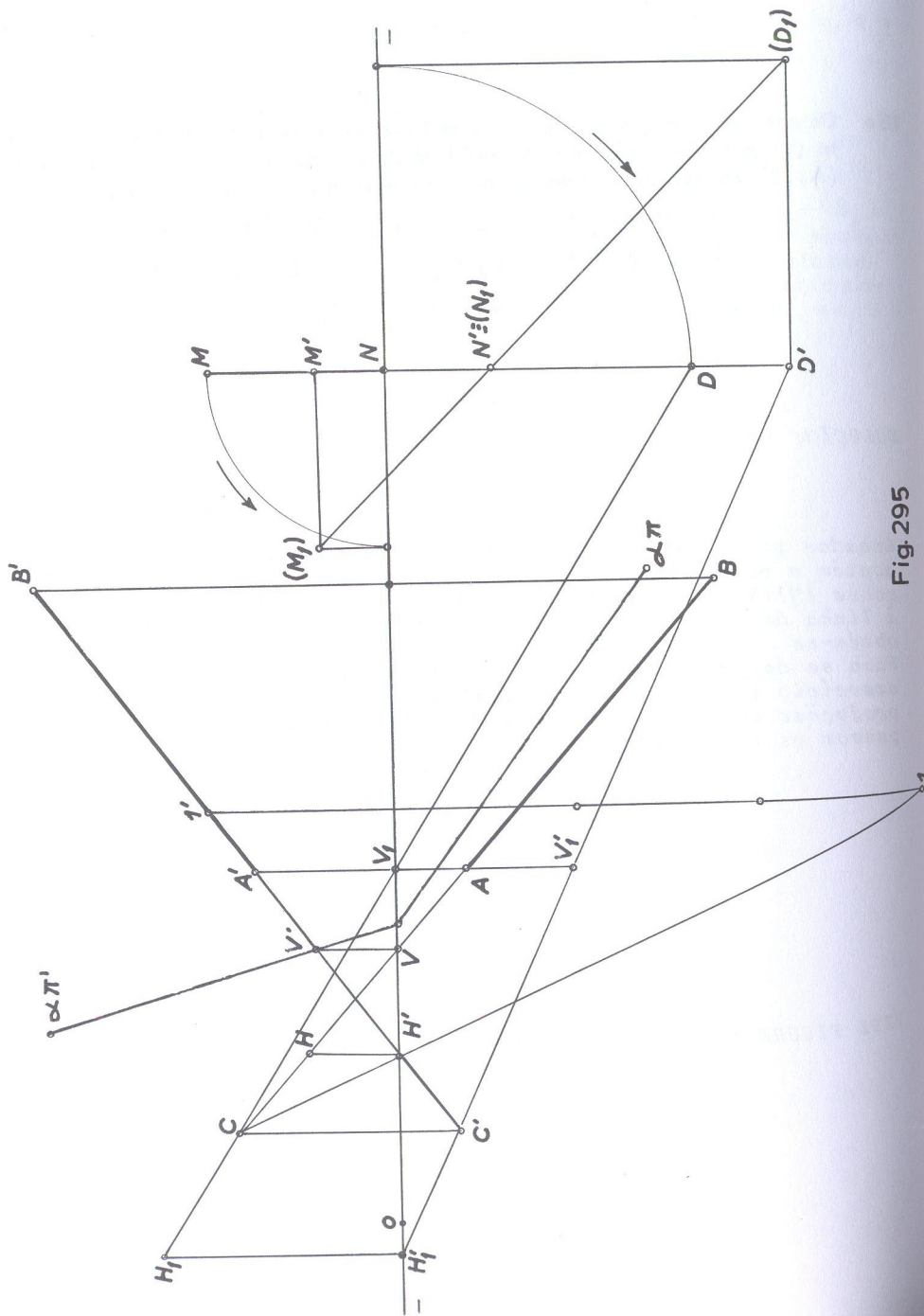



Fig. 295

76 • Preencha as lacunas:

1) - As retas que podem estar contidas em um plano vertical são: ....

2) Um ponto pertence a um plano quando ....

3) Diz-se que um plano é projetante quando ....

4) As retas principais de um plano são ....

5) O único plano projetante que não possui reta de máximo declive é o .... e o que não possui reta de máxima inclinação é o ....

6) As retas de máximo declive e de máxima inclinação de um plano de perfil, são respectivamente .... e ....

7) Os elementos geométricos que definem um plano são ....

8) Dois planos são paralelos quando ....

9) Dois planos que possuem os traços de mesmo nome paralelos são paralelos, exceto planos ....

10) A épura de um plano paralelo ao 2º bissetor é caracterizada por possuir os seus traços .... e ....

Obs.: A solução encontra-se no fim deste capítulo após a solução do exercício 98.

77. Por um ponto dado (A), traçar uma reta (A)(B) paralela a um plano (α).

(T) [-1 ; 0 ; 0] $\widehat{\alpha\pi'} = +60°$

(A) [3 ; 1 ; 2] $\widehat{\alpha\pi} = -40°$

(B) [5,5 ; ? ; ?]

SOLUÇÃO: (fig. 296)

O problema é indeterminado porque, por um ponto, pode-se fazer passar uma infinidade de retas.
Traça-se uma reta qualquer (H)(V) do plano e pelo ponto dado, traça-se (A)(B) paralela a reta (H)(V). As projeções de (B) situam-se na linha de chamada de abscissa dada.

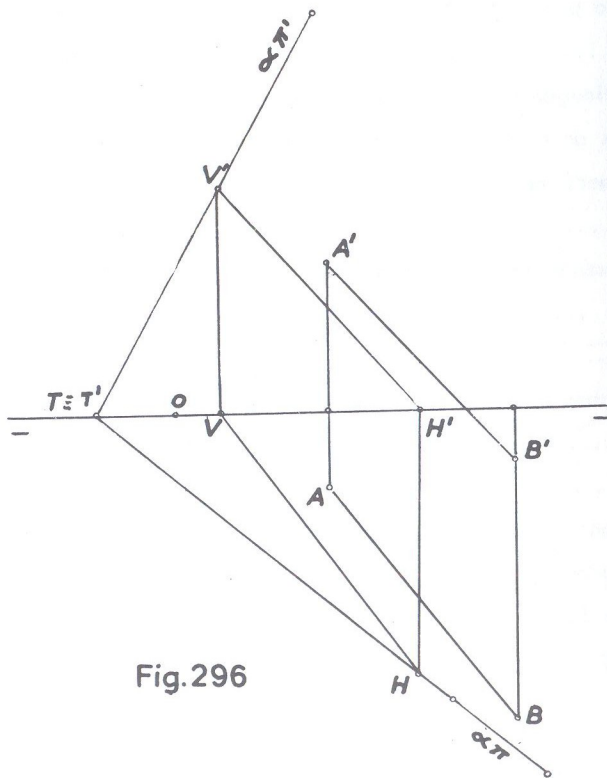



Fig.296

78. Por um ponto (A), traçar uma reta (A)(B) paralela a um plano (α) de topo que contém o ponto (C).

(T) [0 ; 0 ; 0] (B) [4 ; ? ; ?]

(A) [1 ; 1 ; 3] (C) [6 ; 2 ; 4]

SOLUÇÃO: (fig. 297)

Como no exercício anterior, traça-se uma reta qualquer auxiliar (H)(V) do plano e pelo ponto (A) traçou-se a reta (A)(B) paralela a (H)(V) situando-se o ponto (B) na linha de chamada de abscissa dada. O traço vertical απ' do plano foi traçado por se saber que ele contém o ponto (C) e portanto nele se situando a projeção vertical C'

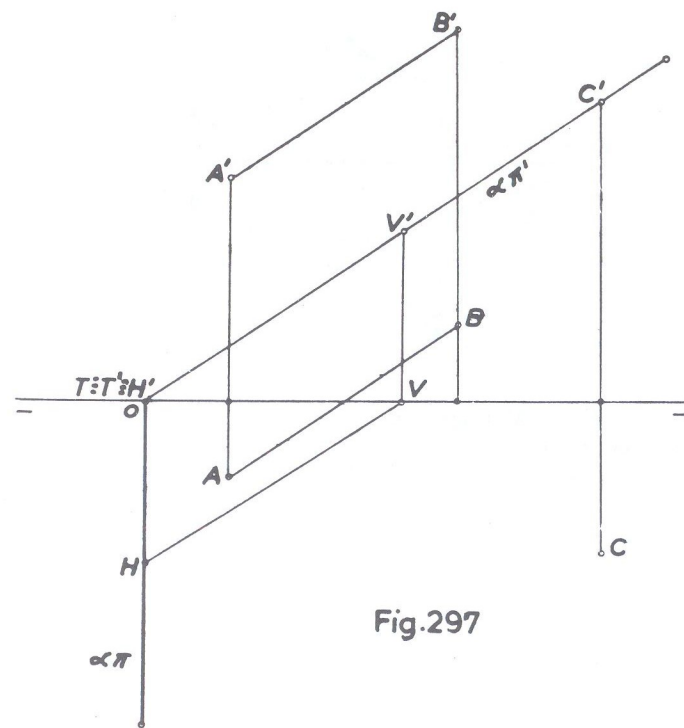



Fig.297

79● Por um ponto (A) traçar uma reta (A)(B) paralela ao plano definido pelo ponto (C) e a linha de terra.

(A) [0 ; -1,5 ; -2]

(B) [3 ; ? ; ?]

(C) [1 ; 1 ; 1,5]

SOLUÇÃO: (fig. 298)

Traça-se arbitrariamente uma reta qualquer auxiliar (D)(C) que pertença ao plano ππ'(C), isto é, reta que tenha seus traços sobre ππ' . Basta traçar pelo ponto dado uma reta paralela à essa auxiliar arbitraria. Note-se que o ponto (A) está no 3º diedro e portanto AB deverá ser paralela a CD e A'B'a C'D; situando-se o ponto (B) na linha de chamada de abscissa igual a 3.

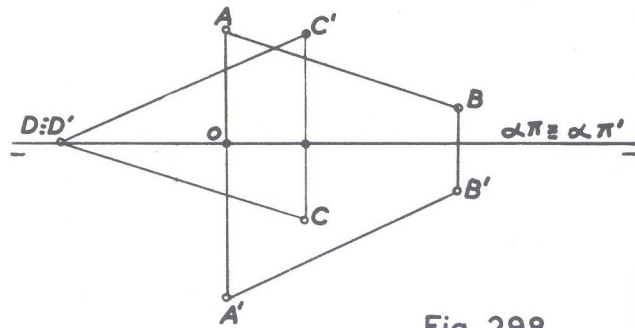



Fig. 298

80● Por um ponto dado (A) traçar duas retas (A)(B) e (A)(C) paralelas respectivamente aos bissetores.

(A) [3 ; 1 ; 1,5]

(B) [6 ; ? ; ?]

(C) [7 ; ? ; ?]

SOLUÇÃO: (fig.299)

Traçam-se duas retas arbitrárias (E)(D) e (I)(G) que pertençam respectivamente aos bissetores (β_I e β_P). A seguir, as duas retas paralelas às retas arbitrárias, partindo de (A), que são (A)(B) e (A)(C), situando-se os pontos (B) e (C) nas linhas de chamada de suas respectivas abscissas.

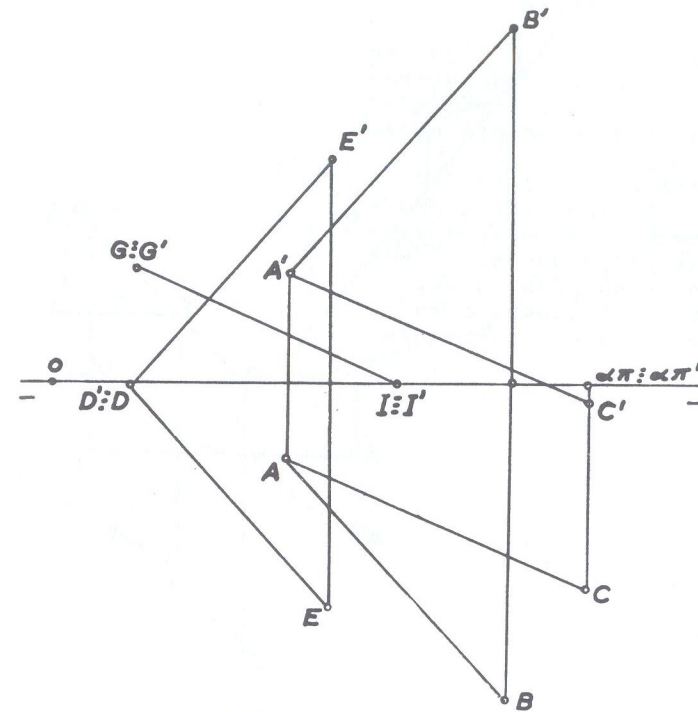



Fig.299

81● Por um ponto dado (A), traçar uma reta frontal (A)(B) paralela ao plano (α) dado por duas retas concorrentes (C)(D) e (D)(E). Destacar o segmento no 1º diedro da reta solução.

(A) [-1,5 ; 1 ; -2]

(B) [4 ; ? ; ?]

(C) [0 ; 0 ; -3,5]

(D) [2 ; -2 ; -1]

(E) [3 ; 0 ; -2]

SOLUÇÃO: (fig. 300)

As retas que definem o plano estão no 3º diedro e conseqüentemente a frontal arbitrária (r) desse plano também estará no 3º diedro.
Traça-se então, do ponto (A) a frontal (A)(B) paralela à frontal arbitrária (r) tendo o ponto (B) suas projeções na linha de chamada de abscissa dada.
O segmento do 1º diedro é (B)(H), onde (H) é o traço horizontal da frontal.

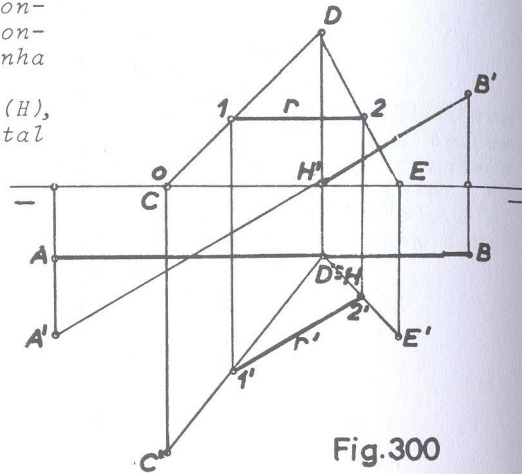
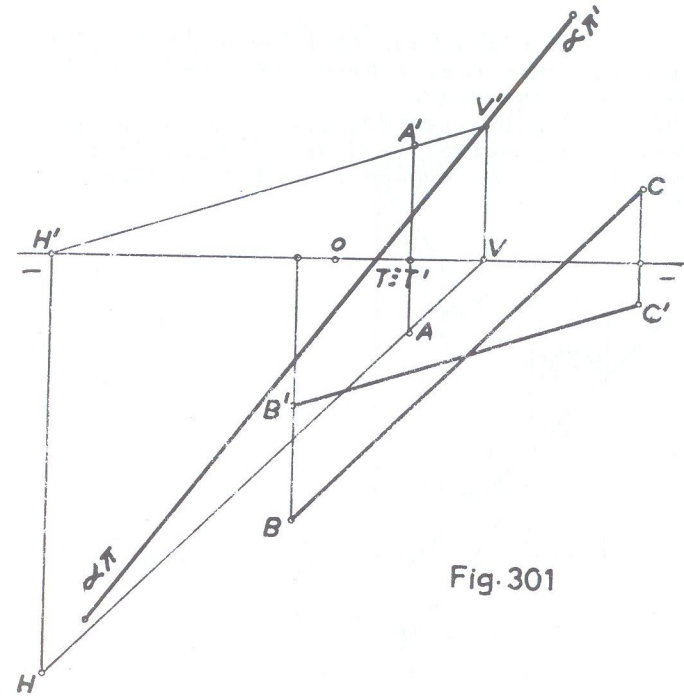



Fig.300

82 • Por um ponto dado (A), fazer passar um plano paralelo a uma reta (B)(C).

(A) [1 ; 1 ; 1,5]
(B) [-0,5 ; 3,5 ; -2]
(C) [4 ; -1 ; -0,5]

SOLUÇÃO: (fig. 301)

Locada a reta e ponto dados, traça-se pelo ponto (A) uma reta qualquer auxiliar, paralela à reta (B)(C) dada, cujos traços são (V) e (H). Qualquer plano que passar por esses traços (V) e (H) resolve o problema que, como se vê, é indeterminado.

Fig·301

83 • Por um ponto dado A), traçar um plano paralelo a uma reta (B)(C) de perfil.

(A) [1 ; 2,5 ; 3]
(B) [5 ; 2 ; 4]
(C) [? ; 3,5 ; 2]

SOLUÇÃO: (fig. 302)

Rebate-se o plano de perfil que contém a reta (B)(C) e tem-se $(B_1)(C_1)$. Por (A_1), obtido também pelo rebatimento do plano de perfil que contém, traça-se uma reta paralela à reta $(B_1)(C_1)$ por cujos traços V' e H passam os traços do plano pedido. Como se vê, o problema é indeterminado porque qualquer plano que passar por V' e por H resolve a questão.
Esse problema admite outra solução. (fig. 303). Determinar-se os traços da reta de perfil dada que são V' e H. Qualquer plano (α) que passar por esses traços é um planc que contém a re

ta de perfil. Desse plano (α), traça-se arbitrariamente uma reta (r) horizontal auxiliar, e pelo ponto dado (A) outra horizontal paralela a anterior.
Qualquer plano(β) por exemplo, que contiver a horizontal (A)(V_1), resolve a questão. O plano (β) é paralelo ao plano(α) e, sendo paralelo a (α), também o será de qualquer reta(B)(C) desse plano.

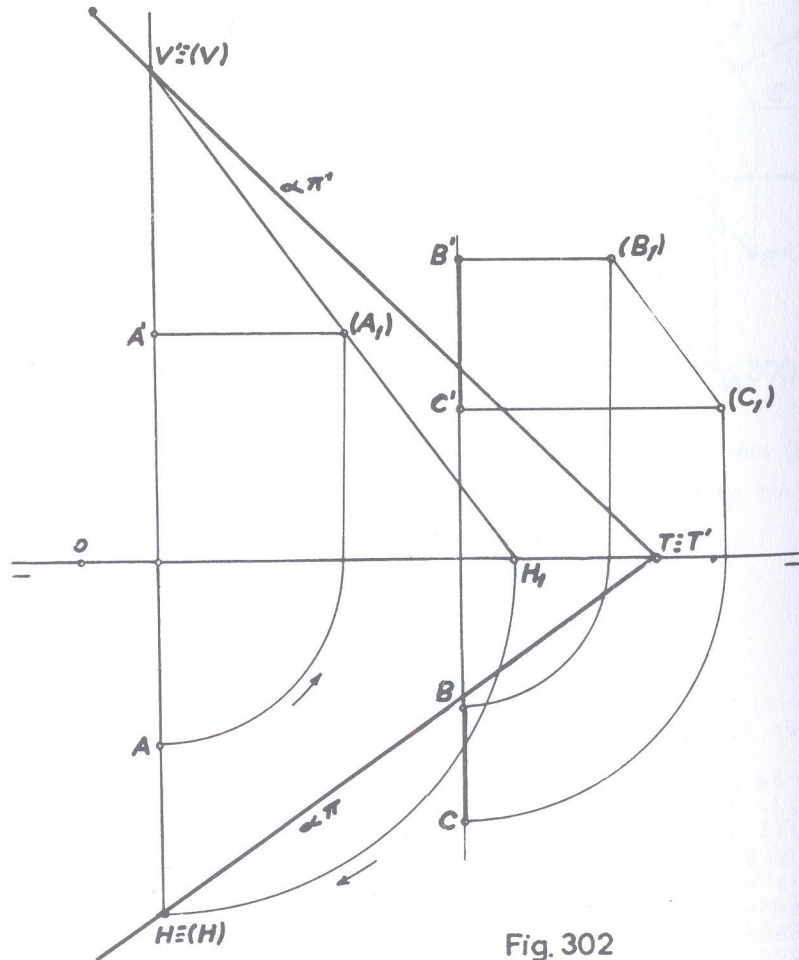



Fig. 302

OUTRA SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA 83 (fig. 303).

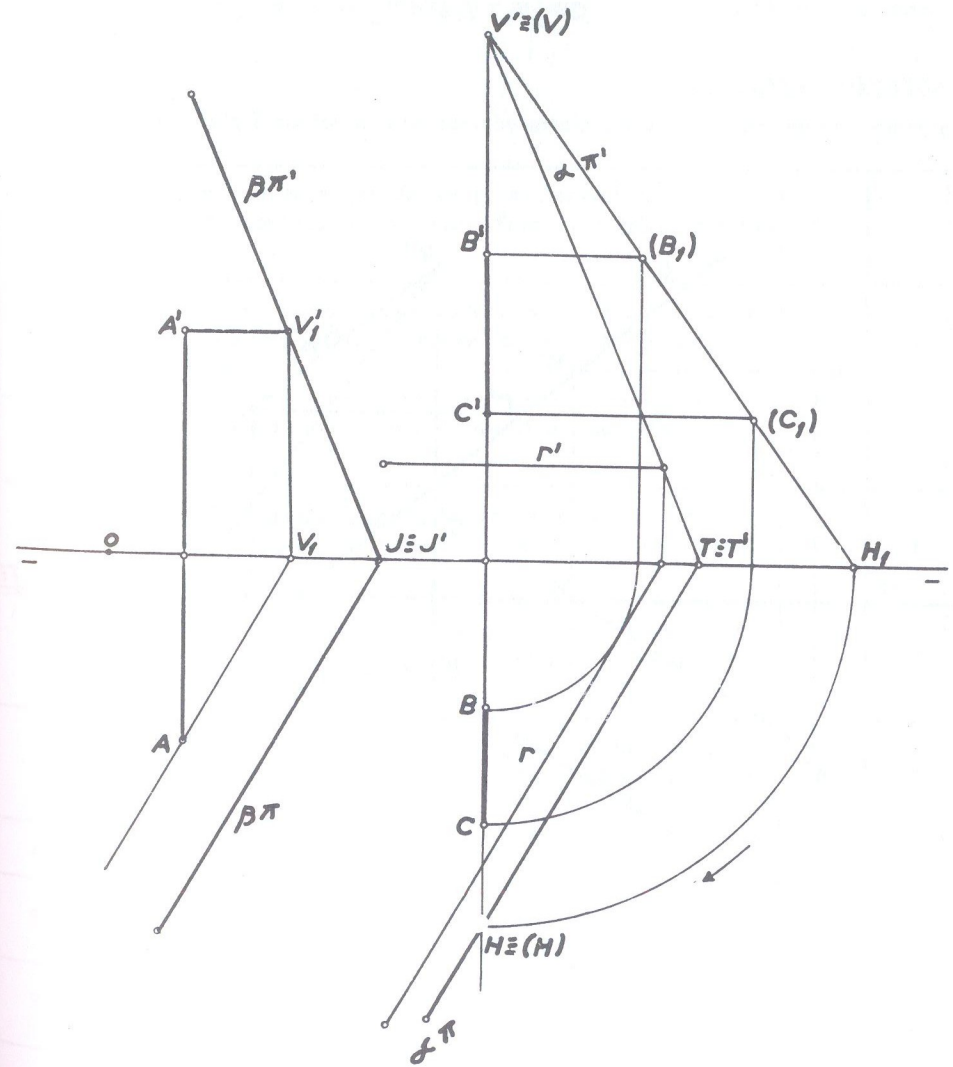



Fig. 303

84 • Mesmo exercício anterior, mas com a reta de perfil na seguinte situação:

(A) [1 ; 2 ; 3]

(B) [5 ; 4 ; -1]

(C) [5 ; 2,5 ; 1]

SOLUÇÃO: (fig. 304)

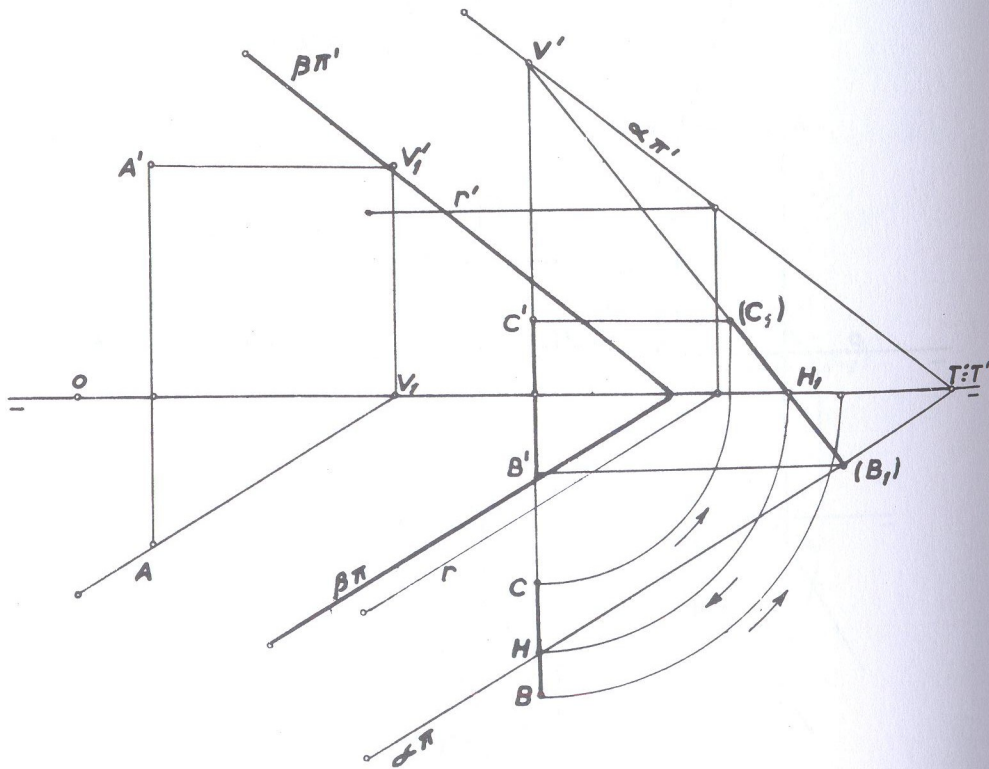



Fig. 304

Utilizando-se a segunda solução do exercício anterior, obtemos, pelo rebatimento, (B1)(C1) por cujos traços V' e H passam os traços de um plano (α) arbitrário. A seguir, traça-se uma horizontal qualquer, (r) por exemplo, de projeções r' e r e que pertença ao plano (α). Do ponto dado, traça-se outra horizontal AV1, A' V'1, paralela a horizontal (r). Qualquer plano, como o (β) por exemplo, que contiver essa última horizontal, soluciona.

85 • Grife o C ou o E conforme a proposição esteja certa ou errada respectivamente.

1	Os ângulos que os traços de um plano formam com a linha de terra são contados no sentido direto, (contrário aos ponteiros).	C	E
2	Exceto o plano qualquer que pode conter quatro retas diferentes, os demais planos só podem conter três retas também distintas.	C	E
3	Toda reta contida num plano de perfil é uma reta de perfil.	C	E
4	Toda reta que possuir seus traços sobre os traços correspondentes do plano, pertencerá a esse plano, sem exceção.	C	E
5	Sempre que um ponto objetivo possuir uma projeção sobre o único traço correspondente de um plano projetante, o ponto pertencerá ao plano.	C	E
6	Em todo plano paralelo à linha de terra, tanto a reta de máximo declive como a de máxima inclinação serão sempre retas de perfil.	C	E
7	Em um plano frontal não há reta de máxima inclinação.	C	E
8	Toda reta paralela ao 2º bissetor possui suas projeções simétricas em relação à linha de terra.	C	E
9	Todo plano paralelo a um dos bissetores será perpendicular ao outro bissetor.	C	E
10	Sempre que dois planos possuírem os traços de mesmo nome paralelos, são paralelos.	C	E

Obs.: A solução a esses quesitos acha-se no fim deste capítulo, após as respostas ao exercício 76.

86 • Por um ponto dado (M), traçar um plano paralelo a duas retas (A)(B) e (C)(D) não coplanares .

(A) [0 ; 2,5 ; 1]   (D) [10 ; 1 ; 0]
(B) [2,5 ; 1 ; 2]   (M) [4 ; 2 ; 1,5]
(C) [7 ; 3,5 ; 3,5]

SOLUÇÃO: (fig. 305)

Pelo ponto dado traçam-se as retas (r) e (s) paralelas às retas dadas e por cujos traços passam os traços correspondentes do plano.

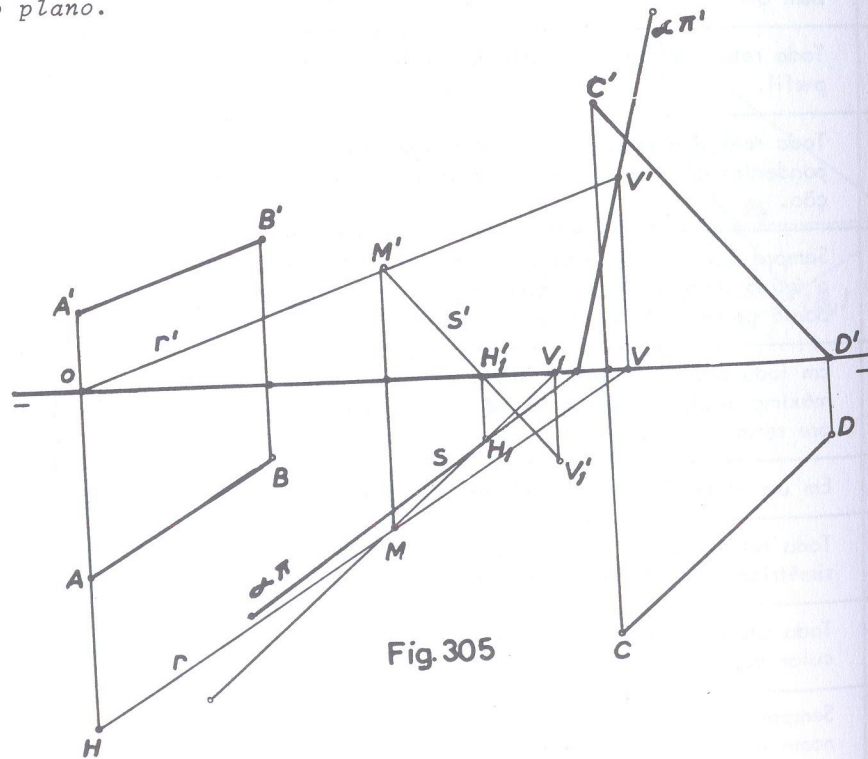



Fig. 305

87 • Por uma reta (A)(B), fazer passar um plano paralelo a uma reta (C)(D) do (β_I)

(A) [2 ; 3 ; 1]   (C) [1 ; 5 ; ?]
(B) [5 ; 0 ; 5]   (D) [10 ; 0 ; 0]

SOLUÇÃO: (fig. 306)

Do ponto (C) não é dada a cota; mas como a reta é do bissetor, todos os seus pontos também o serão, e portanto, a cota desconhecida é igual ao afastamento. De um ponto qualquer (M) tomado arbitrariamente sobre (A)(B), traça-se uma reta (r) paralela a reta (C)(D) e essas duas retas concorrentes definirão o plano (α) pedido, de traços απ e απ' que passam pelos traços correspondentes das retas concorrentes.

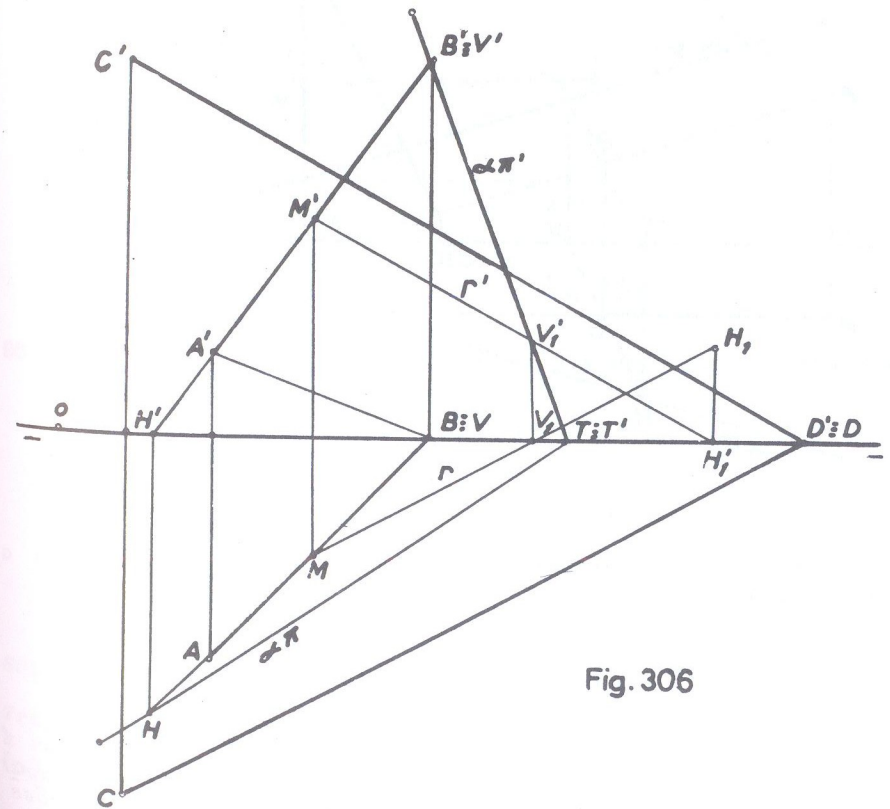



Fig. 306

88 • Por uma reta (A)(B) fazer passar um plano paralelo a uma reta (C)(D) do(β_P)

(A) [0 ; 1 ; 2] (C) [5 ; 0 ; 0]

(B) [3 ; 1 ; 1] (D) [7 ; -4 ; 4]

SOLUÇÃO: (fig. 307)

Exercício semelhante ao anterior. Pelo ponto (B) da reta dada, traçou-se a reta (V)(H_1) paralela a reta (C)(D) do (β_P) e assim as duas retas concorrentes em (B) definem o plano (α).

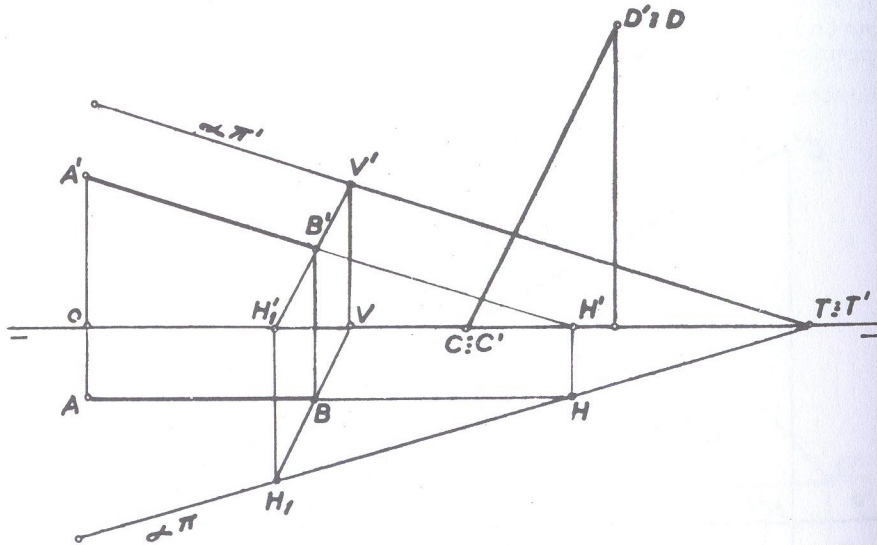



Fig. 307

89 • Por uma reta (M)(N) frontohorizontal, traçar um plano que seja paralelo a uma reta dada (A)(B).

(M) [-3 ; 1,5 ; 2] (A) [0 ; -2,5 ; 2,5]

(N) [1 ; ? ; ?] (B) [3 ; 0 ; -1]

SOLUÇÃO: (fig. 308)

Locadas as retas dadas, faz-se passar por qualquer ponto da reta frontohorizontal (no caso pelo próprio ponto de projeções

M e M'), uma reta (r) paralela à reta (A)(B), por cujos traços passarão os traços do plano (α) paralelo a linha de terra.

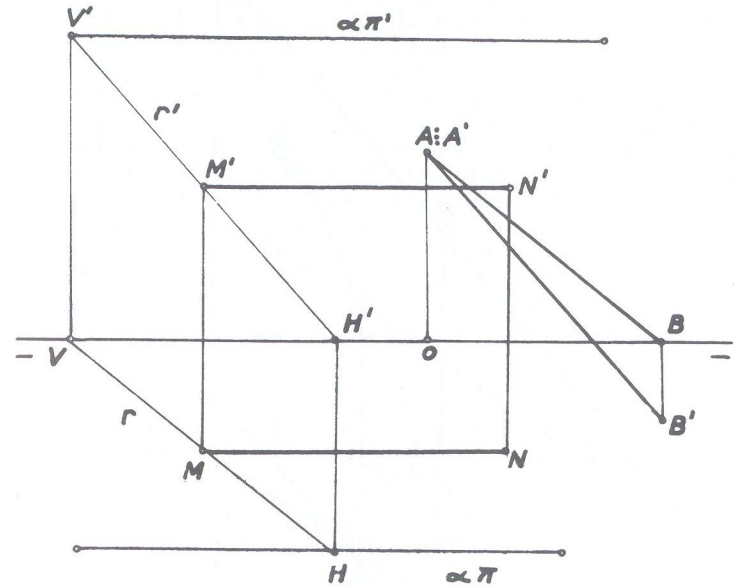



Fig. 308

90 • Traçar por um ponto (A) uma reta paralelo à reta (B)(C) e determinar os traços do plano que contenha essas duas retas.

(A) [3 ; -2 ; -1,5]

(B) [2 ; 2 ; 3]

(C) [5 ; 0 ; 6,5]

SOLUÇÃO: (fig. 309)

Traça-se pelo ponto (A), do 3º diedro, uma reta (r) paralela à reta dada e o plano das duas retas paralelas define o plano (α) pedido.

Fig.309

91. Conhecida a projeção vertical de uma reta (AB) de máxima inclinação de um plano e uma reta (M)(N) desse plano, determinar:

a) os traços do plano;

b) uma reta horizontal do plano de cota igual a -2 e uma frontal de afastamento igual a -1,5.

(A) [0 ; ? ; 2] (M) [4 ; 1,5 ; 4]

(B) [3 ; ? ; 1] (N) [0 ; 0 ; 0]

SOLUÇÃO: (fig. 310)

a) *Se a reta (M)(N) é do plano, conclui-se que (N) é o ponto por onde passarão os traços do plano; e como A'B' é a projeção vertical de uma reta de máxima inclinação, traça-se diretamente απ' perpendicular a A'B'.*
Quanto ao traço horizontal απ, obtém-se da seguinte maneira: se as retas (A)(B) e (M)(N) pertencem a um mesmo plano e se as suas projeções verticais se cortam em O', elas são concorrentes e portanto, teremos O sobre MN. Onde o traço vertical απ' intercepta A'B' teremos o traço vertical V' que nos dá V sobre a linha de terra. Unindo-se OV e prolongando-a nos dois sentidos, tem-se o traço horizontal H da reta de máxima inclinação e por onde passa o traço απ do plano e a projeção horizontal A que situa o ponto (A) no 2º diedro. Tem-se assim a projeção horizontal AB da reta de máxima inclinação da qual só era conhecida a projeção vertical.

b) *a horizontal (C)(D) de cota -2 (D' sobre o prolongamento de απ') e a frontal (E)(F) com afastamento -1,5 (E sobre o prolongamento de απ) solucionam o 2º item.*

Fig.310

92 • Dá-se um plano definido pelos pontos (A), (B) e (C). Pede-se:
a) os traços do plano definido pelos pontos;
b) os traços de um plano que, contendo o ponto (M) seja paralelo ao plano dos pontos (A), (B) e (C).

(A) [10 ; 2,5 ; 1] (C) [11 ; 0 ; 4]
(B) [12 ; 1,5 ; 3] (M) [5,5 ; 1,5 ; 2]

SOLUÇÃO: (fig. 311)

a) Os traços do plano definido pelos pontos dados são obtidos com auxílio das retas horizontais auxiliares (1)(B) e (2)(F) por cujos traços verticais V' e V_1' passa o traço $\alpha\pi'$ sendo $\alpha\pi$ paralelo às projeções horizontais das horizontais auxiliares.

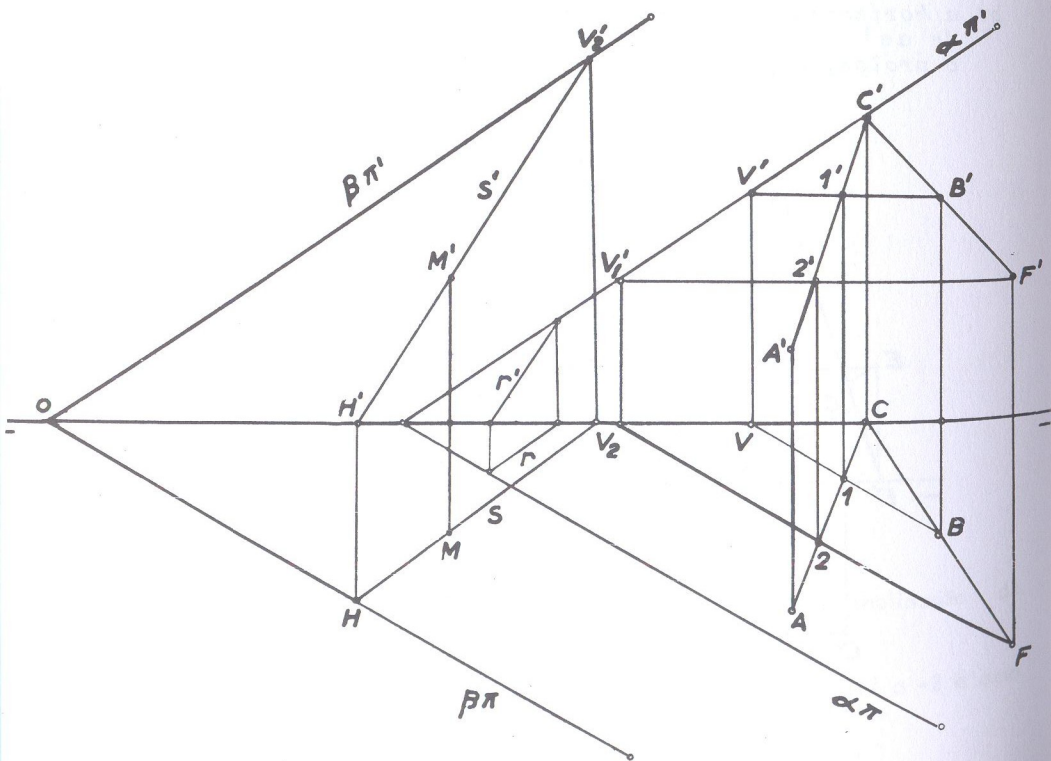



Fig. 311

b) Traça-se uma reta qualquer (r) auxiliar que pertença ao plano (α) já determinado no item anterior, e, pelo ponto dado (M), faz-se passar uma reta (s) paralela à reta (r) e por cujos traços V_2' e H passam os traços do plano (β) que é paralelo ao plano (α).

93 • Dá-se um plano definido pela reta (A)(B) e o ponto (D) do (β_I). Pede-se determinar os traços do plano que contenha o ponto (C) e seja paralelo ao plano dado.

(A) [1 ; 1 ; 2] (C) [8 ; 1 ; 1,5]
(B) [4 ; 3 ; -3] (D) [7 ; -1 ; ?]

SOLUÇÃO: (fig. 312)

A reta (A)(B) e o ponto (D) definem o plano (α), cujos traços

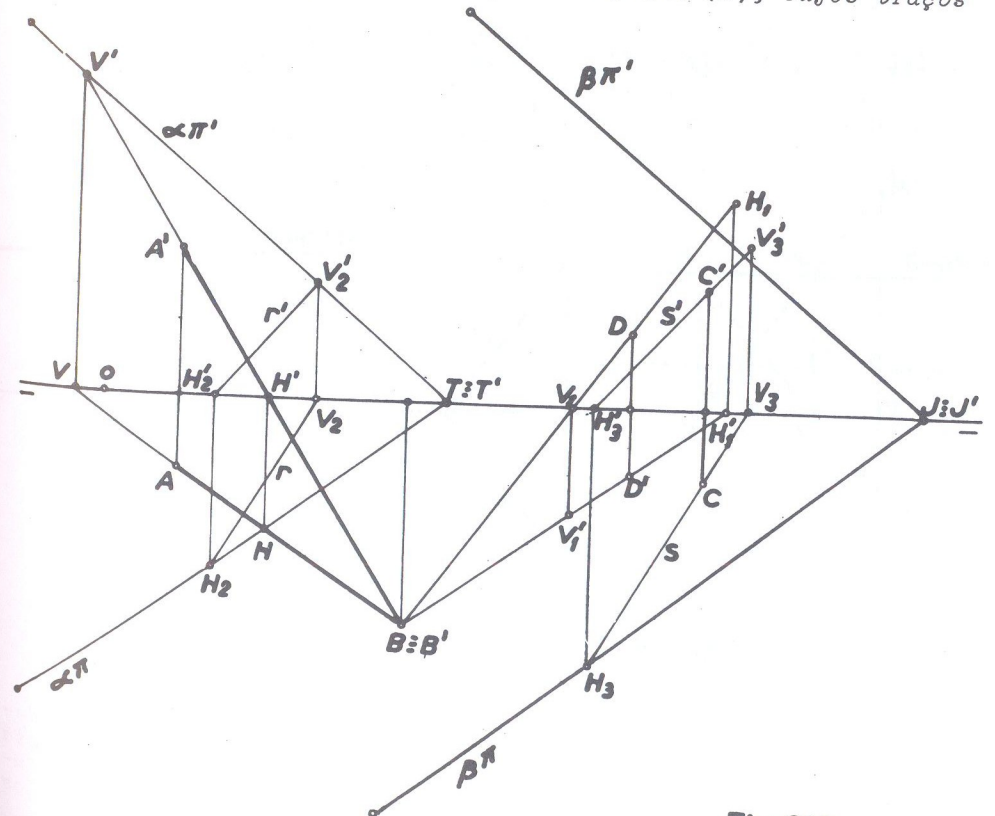



Fig. 312

foram determinados unindo-se o ponto (D) ao ponto (B) e passando pelos traços dessas retas concorrentes, que são V' e V_1' (traços verticais) e H e H_1 (traços horizontais).
Do plano (α) traçou-se uma reta qualquer (r) auxiliar e pelo ponto (C) dado, a reta (s) paralela a reta (r) por cujos traços V_3' e H_3 passam os traços do plano (β) paralelo ao plano (α) ou seja, traços βπ e βπ' paralelos respectivamente aos traços απ e απ'.

94 • Determinar os traços de um plano que contém o ponto (A) e é paralelo ao ($β_I$)

(A) [0 ; 1 ; 3]

SOLUÇÃO: (fig. 313 e 314)

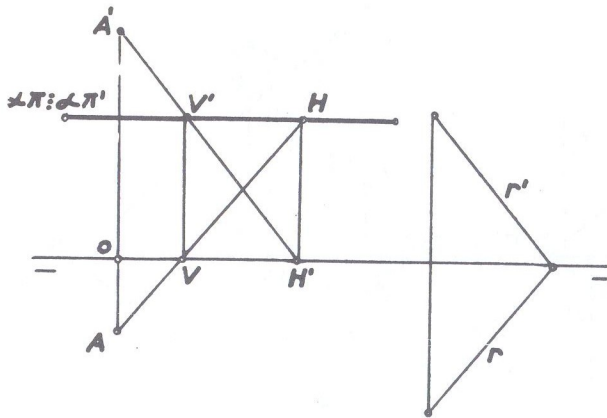
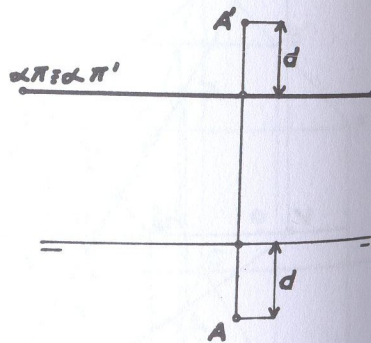



Fig. 313 Fig. 314

Podemos operar de dois modos distintos: o primeiro, que pode-se dizer, é o método clássico, consiste em se traçar uma reta (r) do primeiro bissetor (fig. 313) e pelo ponto (A) dado, uma reta paralela a (r) e por cujos traços V' e H passarão os traços coincidentes do plano pedido (απ≡απ')

Entretanto, podemos simplificar o traçado da épura pois, como vimos quando estudamos plano paralelo ao ($β_I$), a cota do traço vertical do plano é igual à diferença entre a cota e o afastamento do ponto (A) do plano. No caso presente, a cota é 3, positiva, e afastamento 1 também positivo. Então, a diferença 3 - 1 = 2 é positiva, o que significa que os traços do plano (que, como já sabemos, são coincidentes e paralelos à linha de terra), se situam acima da linha de terra (traço vertical de cota positiva). As projeções do ponto se situam a distâncias iguais de ππ' e dos traços do plano. Assim, no caso, (fig.314) a distância d da projeção A a ππ' é igual à distância d da projeção A' aos traços do plano. Então dado o ponto pelas suas coordenadas, é suficiente fazer passar o traço vertical do plano (com o qual o horizontal coincide) paralelo a linha de terra e com cota igual a 2.

OBSERVAÇÕES:

1) *Se o ponto possuir cota menor que o afastamento (fig.315) onde a cota é 2 e afastamento 3, tem-se como diferença entre cota e afastamento: 2 - 3 = -1 , o que significa que será negativa a cota do traço vertical do plano e portanto, marcada abaixo de ππ'. Nesse caso, os traços απ≡απ' do plano se situarão abaixo de ππ', como indica a fig. 315, onde a cota do traço vertical απ' está abaixo da linha de terra. Continuam iguais as distâncias d, porém agora, da projeção horizontal A aos traços do plano e da projeção vertical A' à linha de terra.*

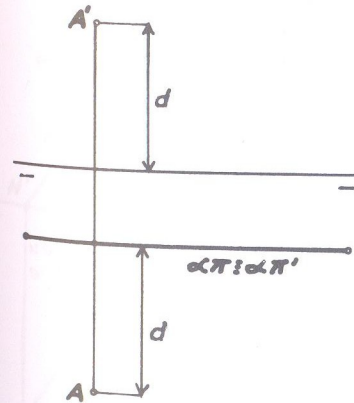
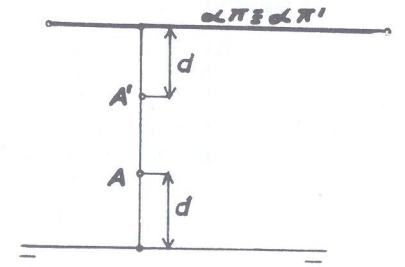



Fig.315 Fig. 316

2) *Se o ponto dado estiver no 2º diedro (fig. 316) onde, no caso, a cota é +2 (positiva) e o afastamento (-1) negativo, tem-se a diferença entre cota e afastamento:*
2 - (-1) = 2 + 1 = 3 (positiva).

Então os traços do plano se situarão acima de $\pi\pi'$ porque a cota do traço vertical será positiva e igual a 3, como indica a fig. 316. Nesse caso (cota maior que o afastamento em valor absoluto), voltam a ser iguais as mesmas distâncias apontadas na fig. 314.

3) *As figuras 317 e 318 mostram exercícios semelhantes compontos no 3º e 4º diedros respectivamente.*
Na fig. 317: cota negativa (-1); afastamento negativo (-2). Diferença: -1 - (-2) = -1 + 2 = 1 (positivo). Então traço vertical $\alpha\pi'$ acima de $\pi\pi'$ (de cota positiva igual a +1).
Na fig. 318: cota negativa (-1); afastamento positivo (+3). diferença: -1 - (+3) = -4 (negativo). Então traço vertical $\alpha\pi'$ abaixo de $\pi\pi'$ (de cota negativa igual a -4).

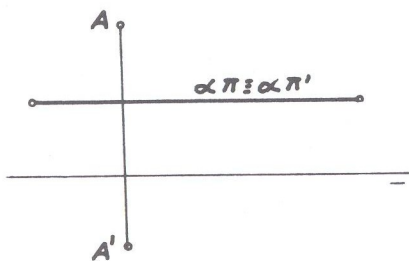



Fig. 317

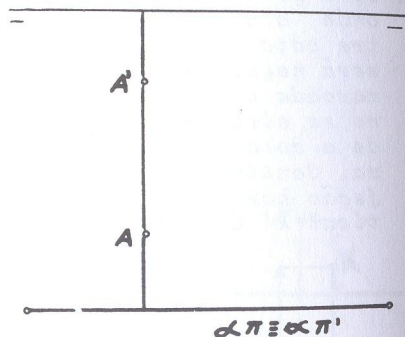



Fig. 318

4) *É de se notar que as projeções do ponto estarão sempre ou interiores ou ambas exteriores à região limitada por $\pi\pi'$ e os traços do plano.*

95 • Determinar os traços de um plano que contém o ponto (A) e é paralelo ao (β_P)

(A) [0 ; 1 ; 2]

SOLUÇÃO: (fig. 319)

Já sabemos que o plano paralelo ao (β_P) é paralelo à linha de terra e seus traços são simétricos em relação a $\pi\pi'$ (ver fig. 272). Semelhantemente ao exercício anterior, poderemos traçar pelo ponto dado uma reta (r) paralela ao (β_P) que como já sabemos, possui as projeções paralelas entre si (ver fig. 263). Pelos traços dessa reta (r) passarão os traços $\alpha\pi$ e $\alpha\pi'$ do plano pedido, que, como se vê, são simétricos a $\pi\pi'$ (fig. 319), ou seja, cota do traço vertical igual ao afastamento do traço horizontal. E, como vimos quando estudamos plano paralelo ao (β_P), que a soma da cota do traço vertical e afastamento do traço horizontal é igual à soma da cota e do afastamento de qualquer ponto do plano, tem-se que a cota do traço vertical $\alpha\pi'$ é igual a 2 + 1 = 3, isto é, a soma da cota com o afastamento do ponto (fig. 320). E como a citada soma é positiva, isso significa que positiva será a cota do traço vertical do plano,

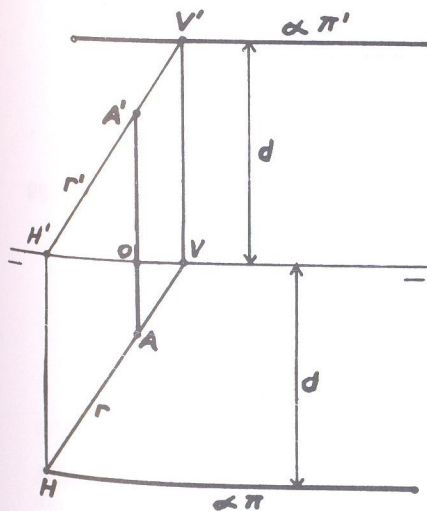



Fig 319

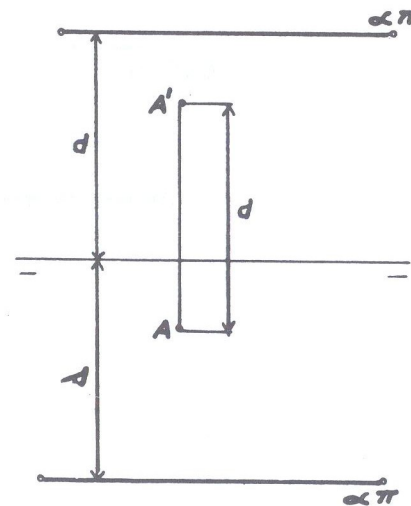



Fig. 320

e portanto, acima da linha de terra; conseqüentemente, o traço horizontal estará abaixo de ππ' com o mesmo afastamento. Cumpre porém, observar que a disposição dos traços deve ser a mesma que a das projeções do ponto dado. Assim, por exemplo, se o ponto estiver no 2º diedro (fig. 321), a soma cota mais afastamento resulta: 3 + (-1) = 3 - 1 = 2 (positiva). Então, cota do traço vertical acima da linha de terra e consequentemente afastamento do traço horizontal abaixo daquela linha. A épura da fig. 321 esclarece, bem como se observa a igualdade das distâncias: cota do traço vertical e afastamento do traço horizontal, iguais ambos à distância entre as projeções do ponto.

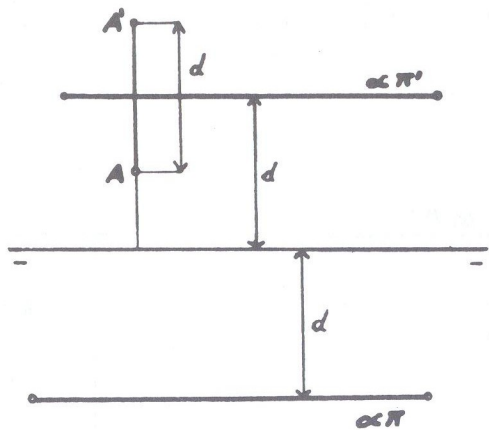



Fig. 321

As épuras das figuras 322 e 323, esclarecem o problema quando se tratar de pontos nos 3º e 4º diedros, a saber:

- ponto no 3º diedro: (fig. 322)
  Soma de cota e afastamento do ponto:
  -1 + (-1) = -1 -1 = -2 (negativo). Então, traço vertical απ' com cota negativa -2 (abaixo de ππ') e consequentemente o traço horizontal απ acima daquela linha.

- ponto no 4º diedro: (fig. 323)
  Soma de cota e afastamento do ponto:
  -3 + 2 = -1 (negativo). Então, traço vertical απ' com cota negativa -1 (abaixo de ππ') e consequentemente o traço horizontal απ acima daquela linha.

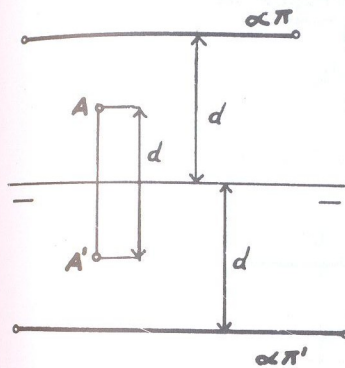



Fig.322

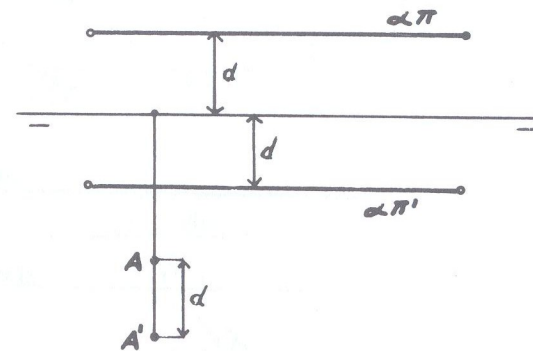



Fig.323

96 • Traçar por um ponto (A), um plano (β) que o contenha e que seja também paralelo a outro plano (α) que é paralelo a ππ'

(A) [0 ; 1 ; 1

απ' = 3

απ = 4

SOLUÇÃO: (figs. 324 e 325)

É suficiente traçar uma reta qualquer (r) que pertença ao plano dado, cuja cota do traço vertical é 3 e afastamento do traço horizontal é 4 (fig 324). A seguir, traça-se pelo ponto (A) dado uma reta que seja paralela a (r) por cujos traços V1 e H1 passarão os traços do plano(β)que evidentemente será também paralelo a ππ'

Podemos também empregar um plano de perfil auxiliar(fig.325), o qual rebatido fornece (A_1) e $V'(H_1)$ como a reta interseção entre o plano (α) dado e o plano (γ) auxiliar. Por (A_1) traça-se a reta $V_1'(H_2)$ paralelamente a $V'(H_1)$, situando-se V_1' sobre o traço vertical do plano auxiliar e (H_2) sobre ππ'. Desfeito o rebatimento, tem-se em H_2 o traço horizontal dessa reta. Pelos traços V_1' e H_2, passarão os traços do plano pedido.

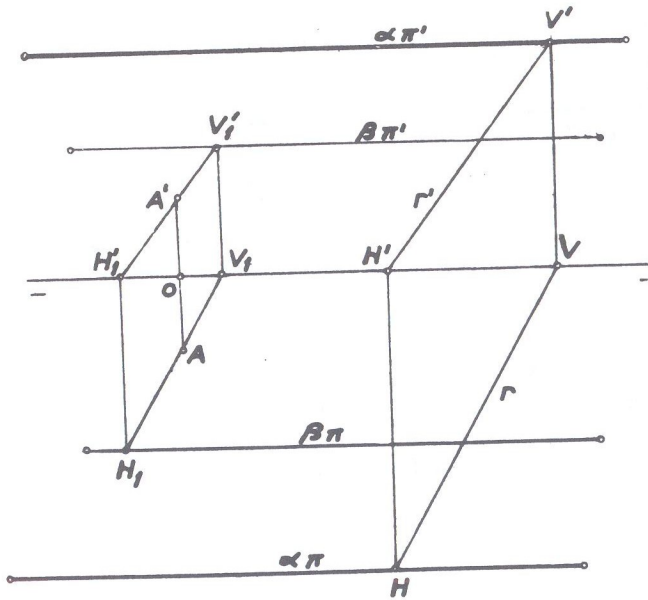



Fig.324

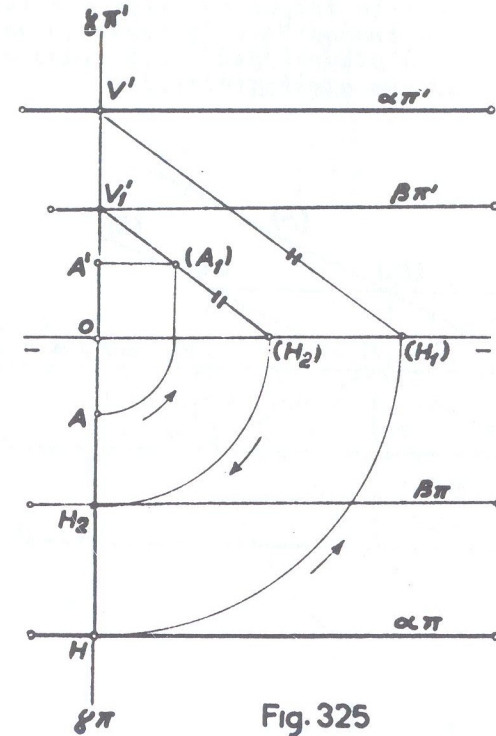



Fig. 325

97. Um plano (α) é definido pelo ponto (B) e ππ'. Traçar um plano (β) paralelo ao plano (α) e que contenha um ponto (A).

(A) [0 ; 4,5 ; 1]
(B) [0 ; 2 ; 1]

SOLUÇÃO: (fig. 326)

Faz-se passar um plano auxiliar (γ) de perfil que contenha os dois pontos dados, o qual, rebatido, fornece (A_1) e (B_1). A seguir, traça-se uma reta (r) que seja do plano definido pelo ponto (B) e a linha de terra, bastando para isso unir (B_1) a origem das coordenadas. Essa reta (r) passando por (B_1) que

é ponto do plano, e, tendo seus traços sobre $\pi\pi'$ é reta do plano. Então é suficiente traçar por (A_1) a reta (s)paralela à reta (r) por cujos traços V'_2 e H_2 passarão os traços $\beta\pi'$ e $\beta\pi$ respectivamente do plano(β)pedido.(O traço horizontal H_2 foi obtido desfazendo-se o rebatimento).

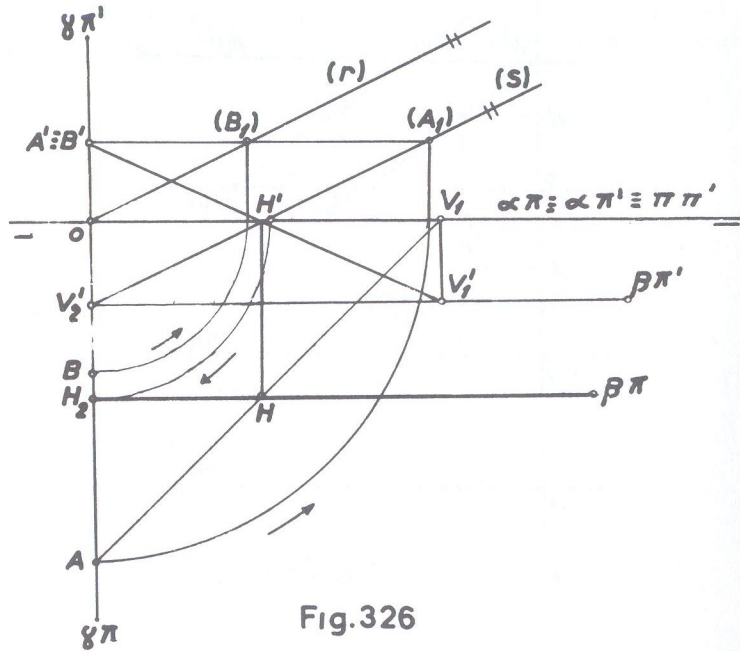



Fig.326

OBS: Nessa mesma épura da fig. 326, foi feita uma verificação para constatar se o ponto (A) pertence ao plano(β), que deve pertencer por exigência do problema.
A verificação foi a seguinte: Pela projeção horizontal A do ponto, traçou-se a projeção horizontal AV_1 de uma reta qualquer, situando-se V_1 sobre a linha de terra que dá a conhecer V'_1 sobre o traço vertical $\beta\pi'$do plano achado, e que é o traço vertical dessa reta. Unindo-se $A'V'_1$ tem-se a projeção vertical dessa mesma reta que dá H' sobre a linha de terra que faz conhecer H (projeção horizontal da reta) sobre a projeção horizontal AV_1 da citada reta e que é o seu traço horizontal. Esse traço H deverá se situar sobre o traço correspondente do plano(β), isto é, sobre βπ , como em verdade acontece.
Assim,pois, a reta $(A)(V_1)$ de projeções AV_1 e $A'V'_1$ possuindo seus traços (H)e (V_1) sobre os traços correspondentes do plano(β)pertencerá a esse plano.

98 • Mesmo exercício anterior, com os pontos (A) e (B) na seguinte situação:

(A) [0 ; 1,5 ; -2]

(B) [0 ; -1 ; 3]

SOLUÇÃO: (fig. 327)

Procedeu-se tal como no exercício anterior, com o plano auxiliar(γ)de perfil, obtendo-se em βπ e βπ'os traços do plano.Da mesma forma efetuou-se a verificação com a reta $(A)(V_1)$ e constata-se que os traços dessa reta se situam sobre os correspondentes do plano.

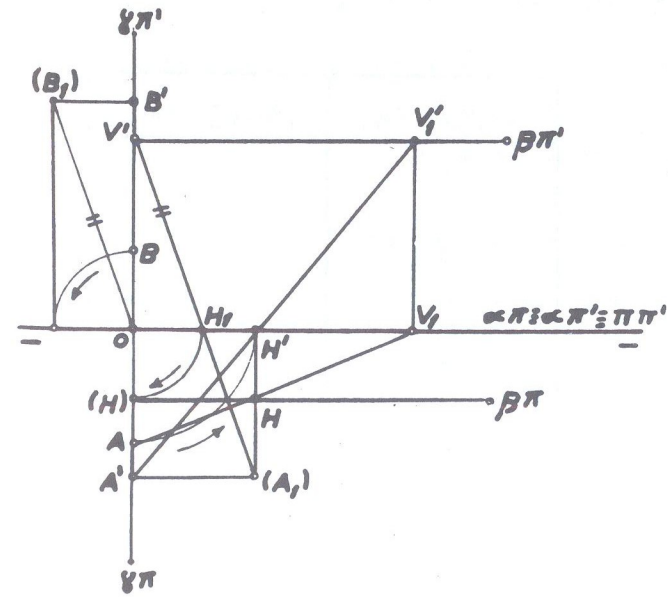



Fig.327

SOLUÇÃO AC EXERCÍCIO 76:

1 - *qualquer, horizontal e vertical;*
2 - *pertence a uma reta do plano;*
3 - *é perpendicualr a qualquer dos planos de projeção;*
4 - *horizontais e frontais;*
5 - *plano horizontal; plano frontal;*
6 - *reta vertical e reta de topo;*
7 - *duas retas concorrentes; duas retas paralelas; uma reta e um ponto exterior a ela e três pontos não em linha reta.*
8 - *um deles contiver duas retas concorrentes paralelas ao outro;*
9 - *paralelas a linha de terra;*
10 - *paralelos a linha de terra e simétricos em relação à mesma.*

SOLUÇÃO AO EXERCÍCIO 85:

PERGUNTAS	RESPOSTAS
1	E
2	C
3	E
4	E
5	C
6	C
7	C
8	E
9	E
10	E

CAPÍTULO IV

- **A) Interseção de planos**
- **B) Interseção de retas e planos**
- **C) Ponto comum a três planos**
- **D) Perpendicularismo de retas e planos**

Exercícios:

- **referentes a A)**
- **referentes a B)**
- **referentes a C)**
- **referentes a D)**

A) Interseção de planos

Dois planos quando não são paralelos, diz-se que são secantes, isto é, eles "se cortam" ou "se interceptam"; e essa interseção deles é sempre uma reta, como se observa de início com a linha de terra que é a interseção dos planos de projeção.

Evidente é, pois que não há interseção quando os dois planos são paralelos.

Para se obter a interseção de dois planos, basta determinar dois pontos que sejam comuns a ambos os planos ou apenas um ponto, quando se conhece a direção da interseção.

Para facilidade de estudo, dividimos os diversos casos em três grupos, a saber:

1º grupo: Ambos os planos são dados pelos traços (cruzando-se ou não nos limites da épura);

2º grupo: Apenas um dos planos é dado pelos traços;

3º grupo: Os planos não são dados pelos traços.

No primeiro grupo, quando os planos são dados pelos traços, em geral a solução é imediata, como por exemplo na fig. 328 onde se deseja a interseção dos planos (α) e (β). É evidente que a reta comum aos dois planos, deve ter seu traço horizontal no ponto de concurso dos traços horizontais dos planos e, da mesma forma, seu traço vertical no ponto de concurso dos traços verticais dos planos dados. Assim, basta unir o ponto (H) ao ponto (V) e teremos a reta (H)(V) ou reta (r) que é a interseção desejada.

Nem sempre porém, os traços dos planos se interceptam nas mesmas regiões onde se situam, isto é, traços verticais acima e traços horizontais abaixo da linha de terra, como no caso da fig. 328, mas a regra geral é sempre a mesma.

Seja por exemplo a fig. 329 onde queremos determinar a interseção dos planos (α) e (β). Os traços horizontais απ e βπ se cruzam em H, nos seus prolongamentos e os verticais απ' e βπ' em V' também nos respectivos prolongamentos, de modo que a reta interseção (H)(V) está no 3º diedro.

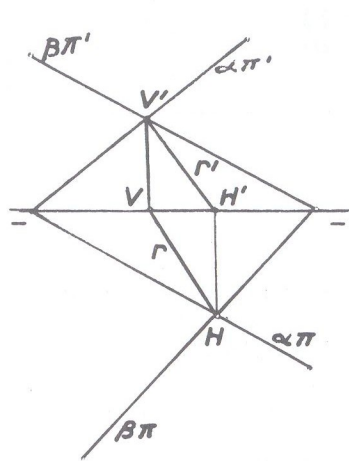
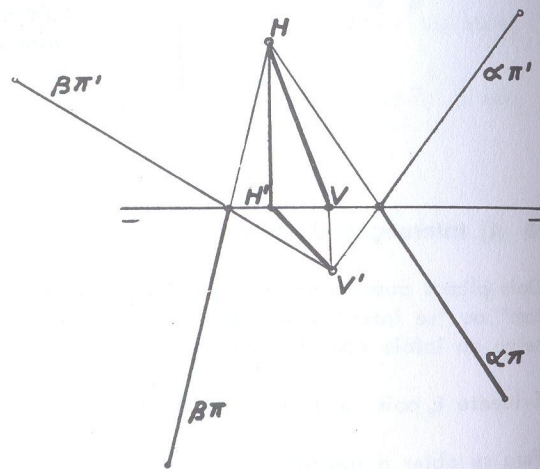



Fig. 328 Fig. 329

Pode ocorrer que, ou pela disposição dos dados ou por exigência do problema, não se possam determinar o ponto (V) ou o ponto (H), isto é, não se possam obter na épura o ponto de concurso de qualquer dos traços dos planos. Nesse caso a solução não será imediata e teremos que recorrer a plano (ou planos) auxiliares, o que veremos na parte prática, de exercícios.

Se acontecer que os planos tenham traços de mesmo nome paralelos, também a solução é imediata.

Seja a fig. 330 onde os traços horizontais dos planos (α) e (β) são paralelos. Nesse caso, o ponto de concurso dos traços horizontais está no infinito (ponto impróprio) e então a projeção horizontal da interseção será paralela a esses traços e a reta interseção será portanto a horizontal (r).

Se dois planos forem paralelos à linha de terra, pelo fato de possuírem os traços de mesmo nome paralelos não significa que eles sejam paralelos. Nesse caso, a in-

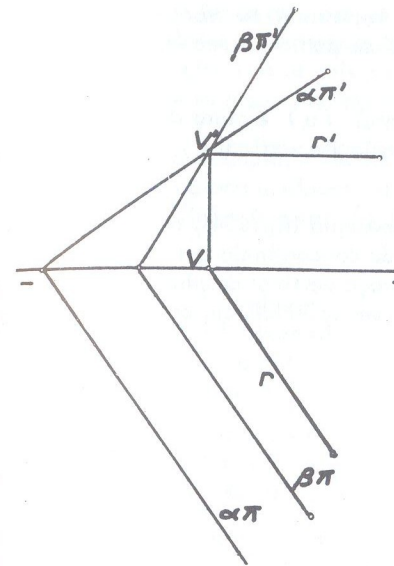
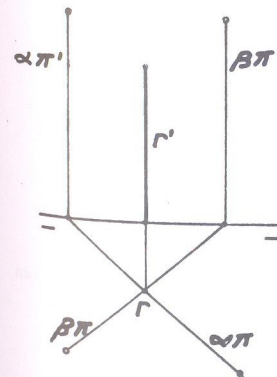



Fig. 330

terseção, quando houver, será sempre uma reta frontohorizontal. A solução não é imediata e teremos que nos socorrer de plano auxiliar o que também veremos na parte prática.

Quando os dois planos concorrem num mesmo ponto da linha de terra ou um deles passar por essa linha, também a solução não é imediata e veremos os diversos casos na parte de exercícios.

Quando os dois planos forem verticais (ou de topo) as interseções serão respectivamente retas verticais (ou de topo) como vemos nas figuras 331 e 332.

Em ambos os casos, a projeção puntual de cada reta interseção se situará em coincidência com o ponto de concurso dos respectivos traços.

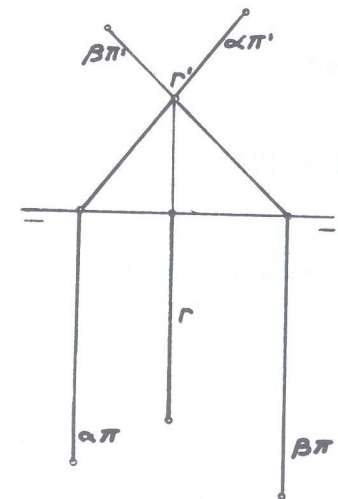



Fig. 331

Fig. 332

Quando um dos planos só possuir um traço (plano horizontal ou frontal), a reta interseção nele terá a projeção respectiva, que será um ponto ou uma reta, dependendo do outro plano.

Assim, por exemplo, na fig. 333, um plano horizontal (α) e outro de topo (β), terão na reta de topo (r) a sua interseção, onde a projeção vertical r', como já se sabe, estará na concorrência dos traços.

Se um dos planos for qualquer e outro frontal, por exemplo (fig.334), a interseção será a reta frontal (r), de traço horizontal H no ponto de concorrência dos traços correspondentes do plano, e projeção vertical paralela ao traço vertical do plano de dois traços. Essa interseção estará com sua projeção horizontal em coincidência com o traço de mesmo nome do plano, como é evidente.

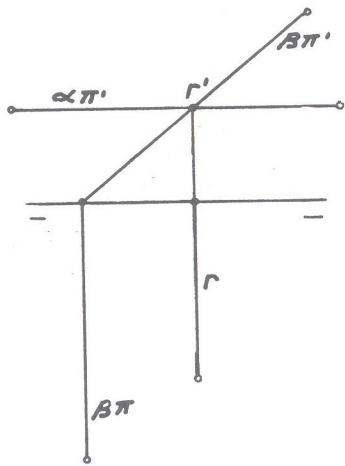



Fig. 333

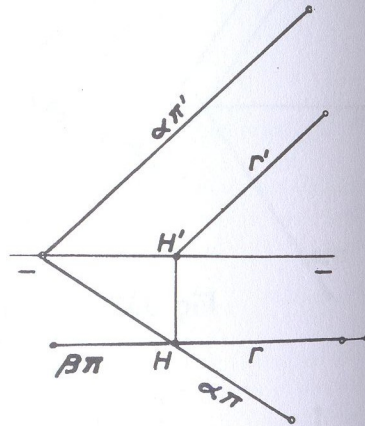



Fig. 334

OBSERVAÇÕES:

1) No estudo de interseção de planos, deve-se ter em vista que a reta interseção, sendo comum aos dois planos, deverá ser uma reta que neles possa estar contida.

Assim, por exemplo, se desejarmos a interseção de um plano horizontal (α) com um plano frontal (β) deve-se recordar:

Retas de plano horizontal: horizontal; de topo; frontohorizontal

Retas de plano frontal: frontal; vertical; frontohorizontal

Observa-se que a única reta comum aos dois planos é a frontohorizontal; daí, a interseção dos dois planos considerados é uma frontohorizontal, o que aliás se constata facilmente, materializando os dois planos no espaço. Nesse caso, as projeções da interseção estarão sobre os traços correspondentes dos planos, como se observa na fig. 335.

Seja, como outro exemplo, determinar a interseção de um plano qualquer (α) com outro paralelo a linha de terra (β). Temos que:

Retas de um plano qualquer: qualquer; horizontal; frontal; de perfil

Retas de plano paralelo a ππ': qualquer; frontohorizontal; de perfil

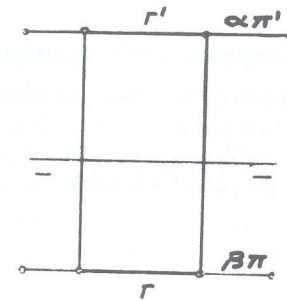



Fig. 335

Verifica-se que as retas comuns aos planos, são retas qualquer e de perfil, de que vai depender da posição dos traços dos planos. Assim, nas figuras 336 e 337, temos os dois casos considerados, cujas interseções são as retas (r) e (s), respectivamente qualquer e de perfil.

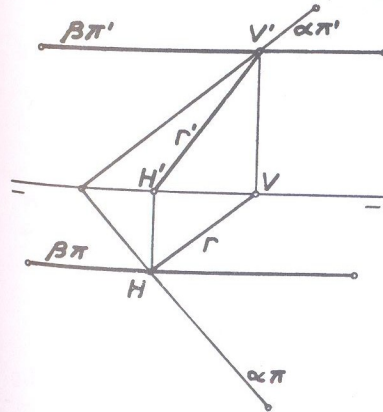



Fig. 336

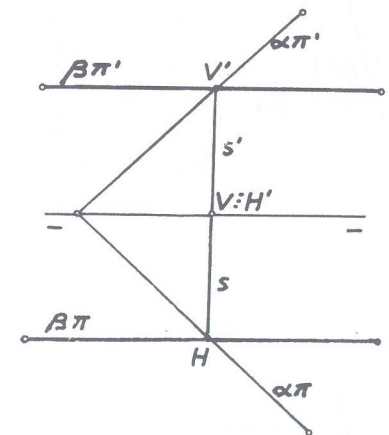



Fig. 337

2) Os casos de interseção de planos considerados dos 2º e 3º grupos, serão objeto dos exercícios da parte prática. Quanto aos do 1º grupo, somente aqueles que não são de solução imediata.

B) Interseção de retas e planos
ou
Traços de retas sôbre planos

Determinar a interseção de uma reta com um plano é o mesmo que procurar o traço da reta sobre o plano, pois, o que se deseja, é determinar o ponto onde a reta fura o plano.

Solução geométrica para o problema:

Para se determinar a interseção de uma reta (A)(B) com um plano (α), faz-se passar pela reta o plano (β) (fig. 338). Esse plano intercepta o plano dado, segundo a reta (C)(D) e as duas retas (A)(B) e (C)(D) se interceptam em (I) que é chamado então "traço da reta (A)(B) sobre o plano (α)", pois é o ponto no qual a reta fura o plano.

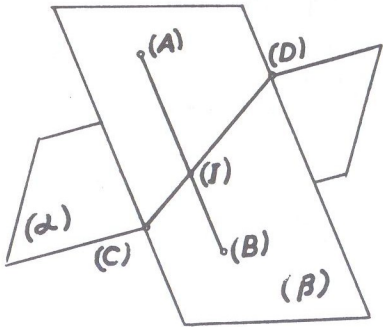
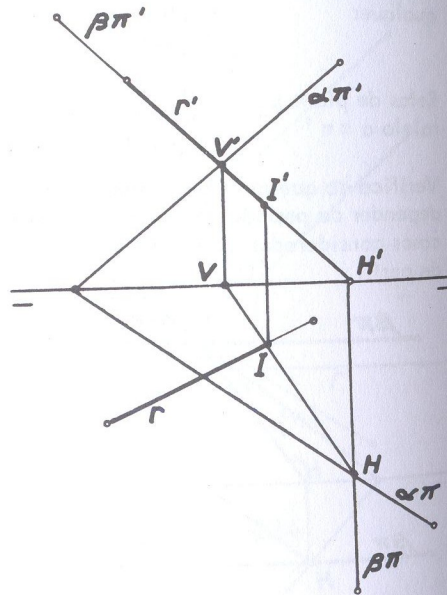



Fig. 338

Fig. 339

Seja, como exemplo, determinar na épura, o traço da reta (r) sobre o plano (α) (fig. 339). Escolheu-se o plano de topo (β) como o projetante da reta (poderia sem nenhum inconveniente ser o plano vertical); para isso, fez-se passar pela projeção vertical r' da reta, o traço vertical βπ' do plano, cujo traço horizontal é perpendicular à linha de terra. Como se sabe, uma reta que pertença a um plano de topo, tem sua projeção vertical em coincidência com o traço correspondente do plano. A seguir, determina-se a interseção dos dois planos: o dado (α) e o projetante (β) da reta. A interseção é a reta (V)(H) cuja projeção horizontal VH intercepta a projeção horizontal da reta dada em I, que dá I' sobre V'H'. Esse ponto (I) é o ponto procurado em que a reta (r) fura o plano (α).

OBSERVAÇÃO

Verifica-se pelo que acima foi exposto que, para se determinar o traço de uma reta sobre um plano, é indispensável o conhecimento de interseção de planos.

C) Ponto comum a três planos

Três planos, quando se interceptam, têm geralmente um ponto comum. Para isso é necessário, porém que qualquer um deles não passe pela interseção dos outros dois e nem seja paralelo a essa interseção.

Se considerarmos, por exemplo, os dois planos de projeção e um terceiro plano que seja bissetor por exemplo, veremos que este último, passando pela linha de terra, que é a interseção dos dois primeiros, determina não só um ponto comum com os primeiros, porém, uma infinidade deles. Já com um plano paralelo a linha de terra e os dois de projeção, não há nenhum ponto comum.

Para se obter o ponto comum a três planos, pode-se proceder de dois modos diferentes.

1º) procuram-se as interseções de um dos três planos dados com os outros dois e o ponto comum a essas duas interseções é o ponto procurado;

2º) determina-se a interseção de dois quaisquer dos planos dados e procura-se depois o traço dessa interseção sobre o terceiro plano; o ponto em que essa reta interseção fura o terceiro plano, é o ponto comum.

OBSERVAÇÃO

Verifica-se assim que, para se determinar um ponto comum a três planos é necessário o conhecimento dos dois assuntos anteriores: interseção de planos e traço de reta sobre o plano. É, pois, uma sequência de assuntos que deve e precisa ser obedecida, nessa ordem:

- interseção de planos;
- interseção de reta e plano;
- ponto comum e três planos.

D) Perpendicularismo de retas e planos

Tal como aconteceu quando estudamos paralelismo de retas e planos, também neste assunto, para facilidade do estudo, ficam estabelecidos três grupos a saber:

1º grupo
- a) reta perpendicular a plano;
- b) plano perpendicular a reta.

2º grupo : plano perpendicular a plano;

3º grupo : reta perpendicular a reta ou retas perpendiculares entre si

Estudando separadamente cada grupo, tem-se:

1º GRUPO:

a) RETA PERPENDICULAR A PLANO

Uma reta é perpendicular a um plano, quando é perpendicular (ou ortogonal) a duas retas concorrentes do plano. Assim, por exemplo, na fig. 340, as retas (s) e (s_1) pertencem ao plano (α) e são concorrentes. A reta (r) perpendicular a (s) e (s_1) é perpendicular ao plano (α). Na mesma figura, as retas (s_2) e (s_3) são do plano (α) e a reta (r_1) é ortogonal a elas, sendo também perpendicular ao plano (α)

Fig. 340

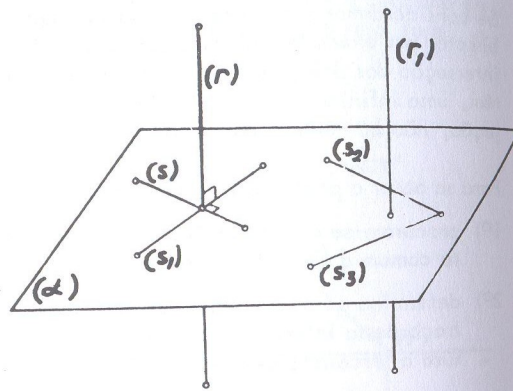
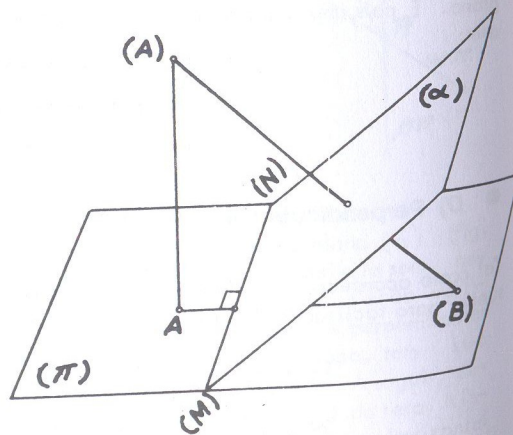
Quando uma reta é perpendicular a um plano, a sua projeção e o traço do plano sobre o mesmo plano de projeção, são perpendiculares entre si.

Exemplificando: seja a reta (A)(B) perpendicular ao plano (α) e (π) o plano de projeção (fig. 341).

O plano projetante (A)A(B) é perpendicular aos planos (α) e (π) porque contém as retas (A)A e (A)(B), perpendiculares respectivamente aos planos (π) e (α). Então o plano projetante é também perpendicular a (M)(N) interseção dos dois planos. A reta (M)(N) perpendicular ao plano (A)A(B) é perpendicular a A(B).

Fig. 341

Então, uma reta é perpendicular a um plano, quando a sua projeção e o traço do plano sobre o mesmo plano de projeção são perpendiculares entre si.

A épura (fig. 342) nos mostra uma reta (r) perpendicular a um plano (α), isto é, as projeções da reta perpendiculares aos traços de mesmo nome do plano. Considerando que o traço horizontal de um plano é paralelo à projeção horizontal de qualquer horizontal do plano e que o

traço vertical do plano é paralelo à projeção vertical de qualquer frontal do plano, conclui-se: uma reta é perpendicular a um plano, quando sua projeção horizontal for perpendicular à projeção de mesmo nome de toda horizontal do plano, o mesmo acontecendo quando sua projeção vertical for perpendicular à projeção de mesmo nome de toda frontal do plano.

Por essas razões, a épura da fig. 343 nos mostra um plano definido por uma horizontal (r) e uma frontal (s), concorrentes em (I). A reta (t) é perpendicular ao plano das duas retas (r) e (s).

Fig. 342

Quando o plano for paralelo a linha de terra ou passar por essa linha, a condição da reta ter suas projeções perpendiculares aos traços do mesmo nome do plano, apesar de necessária, já não é suficiente para se dizer que ela seja perpendicular ao plano, porque, se tal acontecesse, qualquer reta de perfil (fig. 344) seria perpendicular ao plano (α). Sem dúvida que a reta terá que ser de perfil, mas não será qualquer reta de perfil. Nesse caso, a épura não indica diretamente o perpendicularismo da reta com o plano, sendo necessário o rebatimento de um plano de perfil auxiliar, como veremos na parte prática de exercícios.

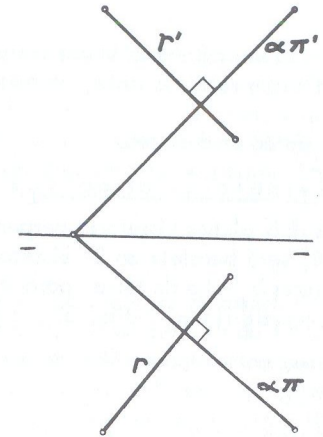
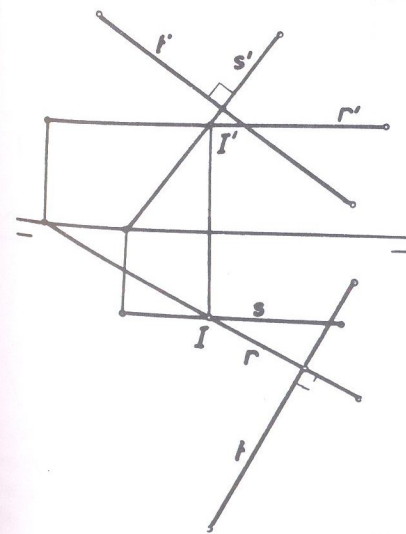



Fig. 343

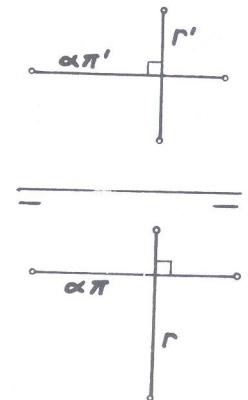



Fig. 344

Quando o plano for definido por um ponto e a linha de terra e o ponto de projeções equidistantes da referida linha, teremos o caso do bissetor.

Vejamos então os dois casos:

Reta perpendicular ao (β_I)

Sendo os dois planos bissetores perpendiculares entre si, toda reta que for perpendicular ao 1º, será paralela ao 2º bissetor; além disso, a reta deve ter suas projeções perpendiculares à linha de terra, porque os traços do plano bissetor estão em coincidência com aquela linha. Então, a reta deve ser paralela ao (β_P) e ser de perfil.

Seja então, por um ponto (A), de projeções A e A' (fig. 345) traçar uma reta perpendicular ao (β_I)

Traça-se uma reta (C)(D) do (β_P), de perfil e, pelo ponto dado, uma reta (A)(B) de projeções AB, A'B' que lhe seja paralela. (ver fig. 133 e recordar paralelismo de duas retas de perfil). Essa reta (A)(B), de perfil, é perpendicular ao (β_I), apresentando como característica principal possuir suas projeções iguais em grandeza e sentido, isto é, AB = A'B' e no mesmo sentido, quer dizer, A' para B' no mesmo sentido que A para B. E sempre que isso ocorrer, os traços de uma reta perpendicular ao (β_I) são simétricos a linha de terra.

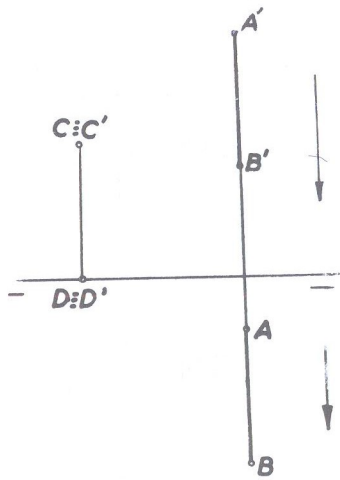



Fig. 345

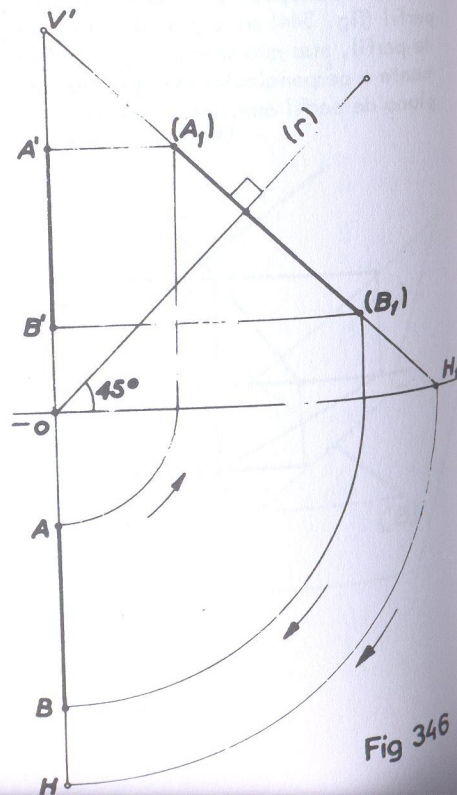



Fig 346

Podemos também resolver o problema, rebatendo-se o plano de perfil que contém o ponto (A) e a sua interseção com o (β_I), conforme nos mostra a épura da fig. 346, onde se constata a simetria dos traços da reta acima mencionada (V' e H equidistantes de $\pi\pi'$), e da mesma grandeza e mesmo sentido, as projeções da reta (A)(B) perpendicular ao (β_I), onde o ponto (B) foi tomado arbitrariamente na perpendicular ao 1º bissetor.

Reta perpendicular ao (β_P)

Uma reta perpendicular ao 2º bissetor, é de perfil e paralela ao 1º bissetor. A reta pedida, (A)(B), deverá então ser paralela a uma reta (C)(D) de perfil e do 1º bissetor. (fig. 347). Nota-se na perpendicular ao (β_P) que o segmento (A)(B) possui também suas projeções da mesma grandeza (AB = A'B') mas, inversamente ao caso anterior, de sentidos diferentes, isto é, a projeção horizontal AB no sentido de A para B (baixo para cima) e a vertical A'B' no sentido A' para B' (cima para baixo), o que se observa pelo sentido das setas.

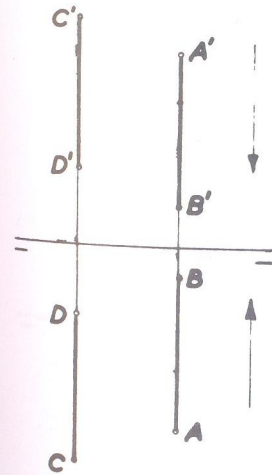



Fig. 347

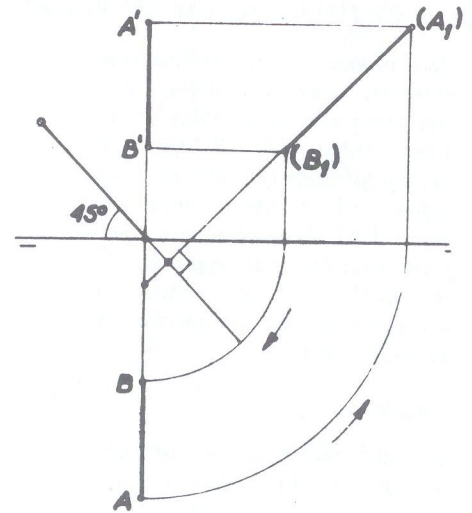



Fig. 348

Como no caso de reta perpendicular ao (β_I), também se pode traçar uma perpendicular ao (β_P) rebatendo-se o plano de perfil que passa pelo ponto (A) e sua interseção com o (β_P) conforme nos mostra a épura da fig. 348. A reta perpendicular ao (β_P) apresenta a característica de possuir seus traços coincidentes.

b) PLANO PERPENDICULAR À RETA

É a recíproca do caso anterior. Logo, quando os traços de um plano forem perpendiculares às projeções de mesmo nome de uma reta, o plano é perpendicular à reta. Então, (fig. 349) para se traçar por um ponto (A) um plano (α) perpendicular a uma reta (s), traça-se pelo ponto uma horizontal (r) do plano pedido, cuja projeção horizontal r seja perpendicular à projeção de mesmo nome da reta dada.

O plano que contiver essa horizontal é a solução.

Fig. 349

2º GRUPO

PLANO PERPENDICULAR A PLANO

Dois planos são perpendiculares entre si, quando um deles contém uma reta perpendicular ao outro. Então, (fig. 350) para de um ponto dado (A) se traçar um plano (β) perpendicular a um plano (α) dado, traça-se a perpendicular (r) sobre o plano dado e qualquer plano conduzido por essa reta será perpendicular ao plano dado.

OBSERVAÇÃO

O problema é indeterminado porque por uma reta pode-se fazer passar uma infinidade de planos, como já sabemos.

Se dois planos são perpendiculares, isso não significa que seus traços sejam perpendiculares (ver fig. 350). Só há perpendicularismo entre os traços, quando um deles pelo menos é projetante. Assim, por exemplo, se

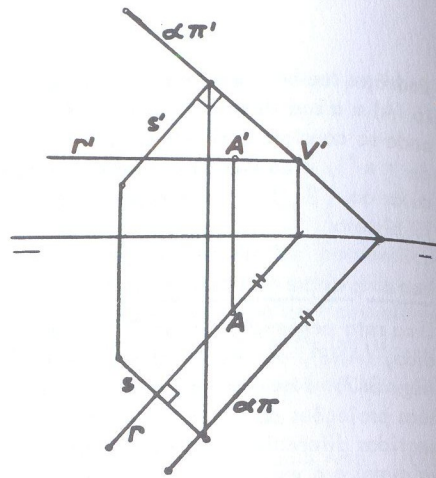
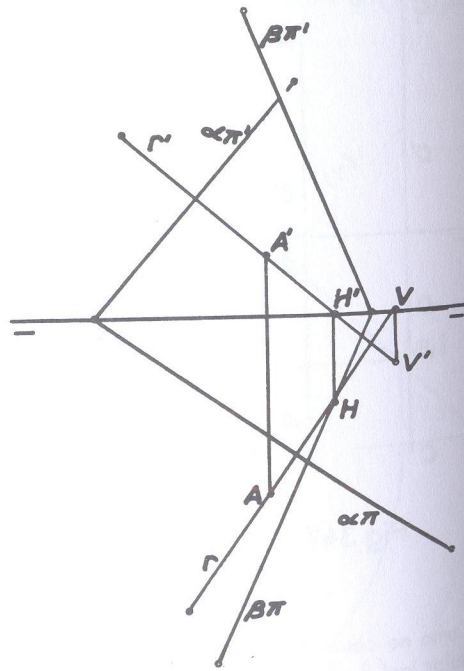



Fig. 350

um deles é projetante em relação ao plano (π) - plano vertical - os seus traços horizontais são perpendiculares entre si e, se projetante em relação ao plano (π') - plano de topo - os seus traços verticais é que são perpendiculares entre si. (fig. 351 e 352).

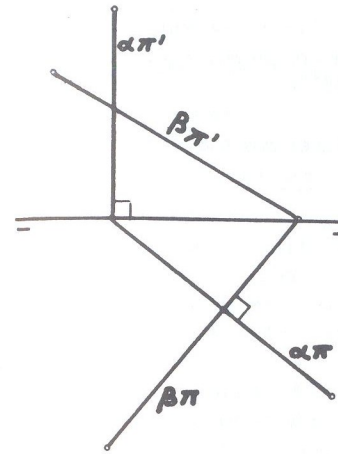



Fig. 351

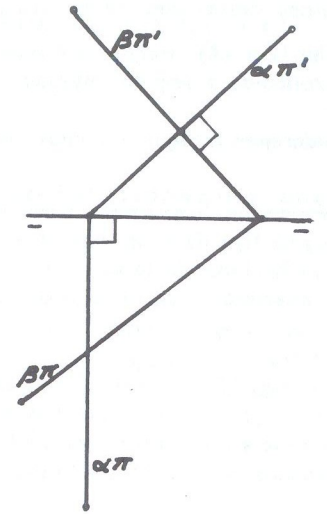



Fig. 352

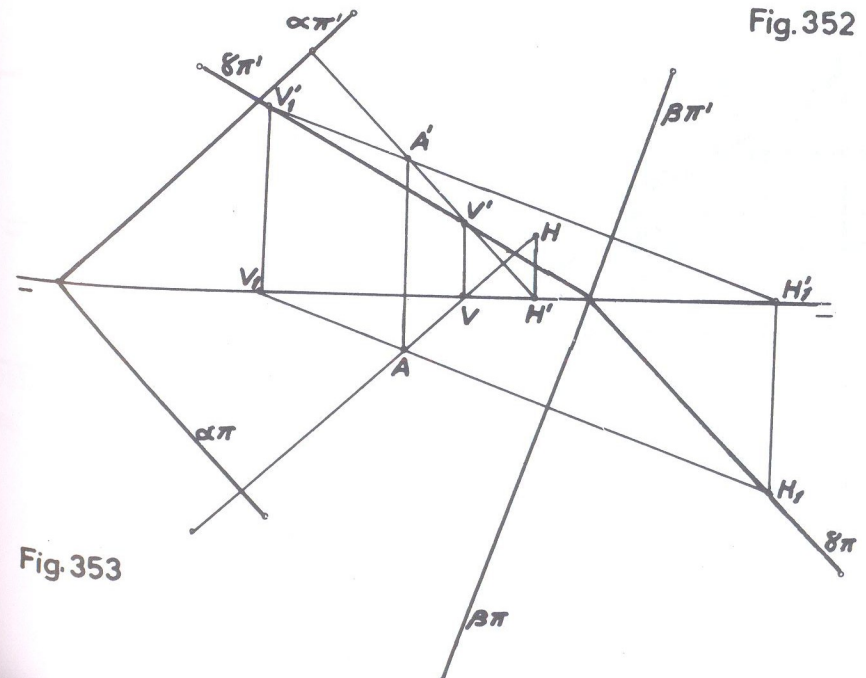



Fig. 353

Ainda por um ponto dado pode-se traçar um plano perpendicular a dois planos dados; basta para isso traçar um plano perpendicular à interseção dos dois planos dados, o qual será perpendicular a cada um deles. Para esse caso pode-se utilizar outro método, que consiste, do ponto dado baixar uma perpendicular sobre cada plano e o plano dessas duas retas será o plano desejado.

Assim, por (A) traçou-se o plano (γ) perpendicular aos planos (α) e (β), utilizando-se o segundo método acima descrito (fig. 353).

Estudaremos a seguir o caso dos planos perpendiculares aos planos bissetores.

Plano perpendicular ao (β_I)

Seja, na fig. 354, a reta (A)(B) perpendicular ao 1º bissetor, cujos traços são simétricos à linha de terra, como já vimos na fig. 345. Qualquer plano, como o (α) por exemplo, que for conduzido pela reta (V)(H), será perpendicular ao 1º bissetor. Sua épura é, pois, caracterizada por possuir os traços simétricos em relação a linha de terra.

Se, na fig. 354, o ponto T ≡ T' se tornar impróprio, isto é, se for lançado ao infinito, o plano (α) tomará a posição da fig. 355, isto é, ficará paralelo à linha de terra, tornando-se então paralelo ao 2º bissetor continuando perpendicular ao 1º bissetor. (Comparar a fig. 355 com a fig. 272).

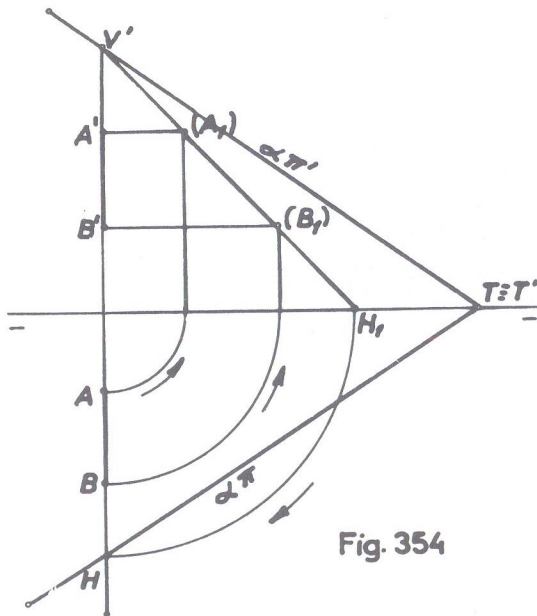



Fig. 354

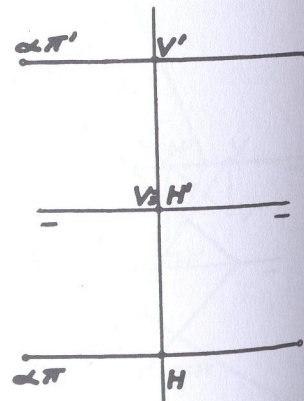



Fig. 355

OBSERVAÇÕES:

São perpendiculares ao (β_I) os seguintes planos:

- plano qualquer de traços simétricos a ππ';
- plano paralelo a linha de terra e também de traços simétricos a ππ'
- qualquer plano de perfil;
- o 2º bissetor.

Plano perpendicular ao (β_P)

Seja na fig. 356, a reta (V)(H) perpendicular ao 2º bissetor, cujos traços estão em coincidência, como já vimos na fig. 347, onde as projeções são iguais em grandeza mas de sentidos contrários. Qualquer plano, como o (α) por exemplo, que for conduzido pela reta (V)(H), será perpendicular ao 2º bissetor. Sua épura é, pois, caracterizada por possuir os traços em linha reta.

Se na fig. 356 o ponto T≡T' se tornar impróprio, isto é, se for lançado ao infinito, o plano (α) tomará a posição da fig. 357, paralelo, pois, ao 1º bissetor continuando perpendicular ao 2º bissetor. (Comparar a fig. 357 com a fig. 271).

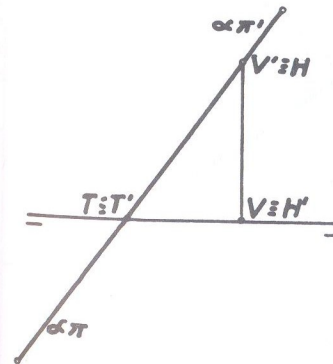
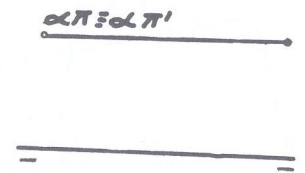



Fig. 356 Fig. 357

OBSERVAÇÕES:

São perpendiculares ao (β_P) os seguintes planos.

- plano qualquer com traços em linha reta;
- plano paralelo à linha de terra com traços em coincidência;
- qualquer plano de perfil;
- o 1º bissetor.

3º GRUPO

RETAS PERPENDICULARES ENTRE SI

A regra geral para se traçar por um ponto uma reta perpendicular a outra, consiste em conduzir, pelo ponto, um plano perpendicular à reta e determinar o ponto de interseção da reta dada com esse plano. Unindo-se o ponto assim obtido, ao ponto dado, teremos a reta pedida.

A fig. 358 nos mostra a solução geométrica. Seja o ponto (A) pelo qual desejamos traçar uma perpendicular à reta (B)(C).

Traça-se pelo ponto, o plano (α) perpendicular à reta (B)(C); o ponto (M) é o traço da reta (B)(C) no plano (α), o qual, unido ao ponto (A) dado, determina a reta (A)(M) que é a reta pedida.

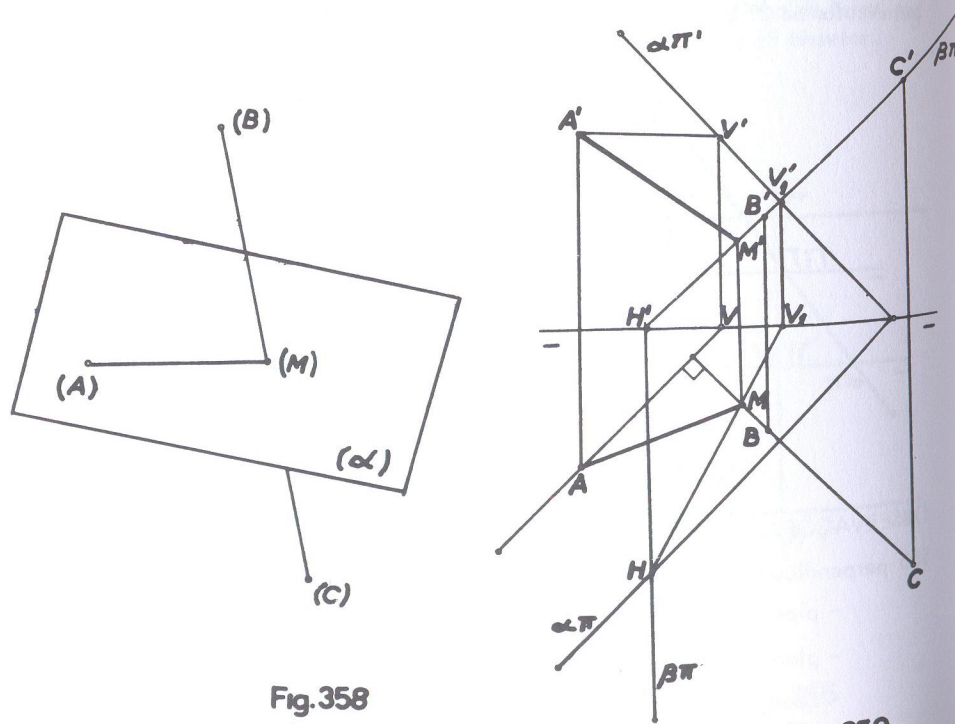



Fig.358

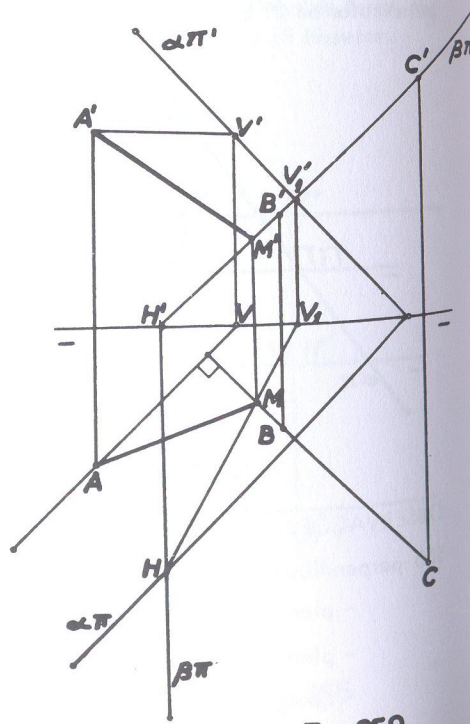



Fig.359

Em épura, (fig. 359), seja o ponto (A) pelo qual se deseja fazer passar uma reta perpendicular à reta (B)(C). Traça-se uma horizontal (A)(V) cuja projeção horizontal AV seja perpendicular à projeção de mesmo nome da reta, a fim de se traçar o plano (α) perpendicular à reta dada. A seguir, para se determinar o traço da reta (B)(C) no plano (α), faz-se passar o plano projetante (β), da reta dada. (usou-se no caso o de topo). A interseção dos planos (α) e (β) é a reta (V_1)(H) e as projeções horizontais da reta BC, e da interseção, V_1H, se interceptam em M, que dá M' sobre o traço vertical do plano projetante.

A reta (A)(M) é a solução, cujas projeções são AM e A'M'.

OBSERVAÇÃO

Quando a reta dada for paralela a um dos planos de projeção, não é necessário aplicar o estudado na solução geométrica, em virtude do teorema projetivo do ângulo reto, que é:

"Quando a projeção horizontal de uma reta qualquer for perpendicular à projeção de mesmo nome de uma reta horizontal, as duas retas são perpendiculares entre si, o mesmo acontecendo com a projeção vertical, se a reta for frontal".

Assim, dada uma reta horizontal (ou frontal) para se traçar por um ponto dado uma reta que lhe seja perpendicular, basta unir a projeção horizontal (ou vertical) do ponto, perpendicularmente a um ponto qualquer da projeção horizontal (ou vertical) da reta dada.

As figuras 360 e 361 nos mostram as retas (r) e (s) perpendiculares respectivamente às retas horizontal e frontal.

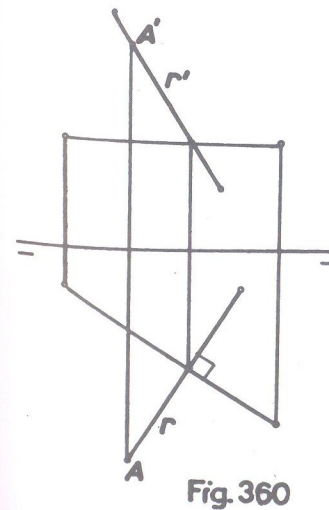



Fig.360

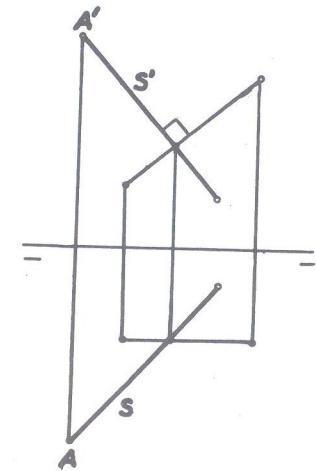



Fig.361

NOTA

Na parte relativa a "Distâncias" serão resolvidos problemas sobre perpendicular comum a duas retas.

A seguir a parte prática do Capítulo IV, com numerosos exercícios.

• Exercícios do capítulo IV

- referentes a A)

99 • Determinar a interseção de dois planos cujos traços se encontram num mesmo ponto (T) de $\pi\pi'$.

$$(T) \; [\,1\,;\,0\,;\,0\,]$$

$\widehat{\alpha\pi'} = +55°$ $\qquad$ $\widehat{\beta\pi'} = +40°$

$\widehat{\alpha\pi} = -30°$ $\qquad$ $\widehat{\beta\pi} = -50°$

SOLUÇÃO: (fig. 362)

O ponto (T) de concurso dos traços sobre ππ' já é um ponto da interseção. Basta então determinar mais um ponto da interseção e para isso traça-se um plano horizontal(γ)auxiliar, que intercepta os planos dados segundo duas horizontais que têm em (I) o ponto comum e que é o outro ponto da interseção desejada. A reta (T)(I) é a solução.

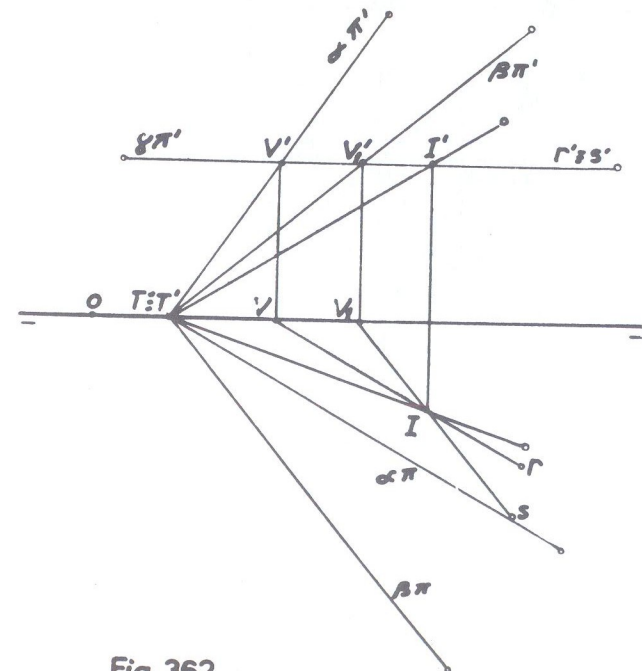



Fig. 362

100 • Determinar a interseção de um plano frontal (α) que contém o ponto (A), com um plano (β) perpendicular ao (β_I)

(A) [4 ; 2 ; 1]

(T) [0 ; 0 ; 0]

$\widehat{\beta\pi} = -40°$

SOLUÇÃO: (fig. 363)

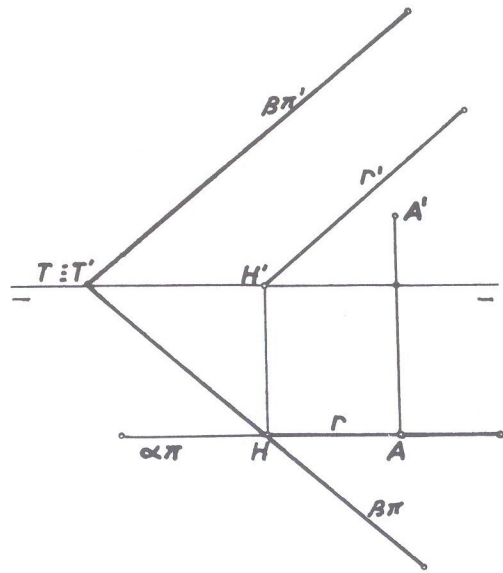



Fig.363

Se o plano frontal contém o ponto (A), será facilmente traçado porque a projeção horizontal do ponto estará sobre o traço do plano. Se o plano(β)é perpendicular ao(β_I),ele terá os traços simétricos a linha de terra e por isso,é suficiente apenas o conhecimento de um ângulo que qualquer dos traços forma com a linha de terra. Como só foi dado o ângulo do traço horizontal, será o mesmo o do traço vertical.
A reta frontal (r) é a solução.

101 • Determinar a interseção de dois planos quaisquer,(α) e (β), cujos pontos de concurso dos traços são respectivamente (T) e (J).

(T) [0 ; 0 ; 0] $\widehat{\alpha\pi}' = 60°$ $\widehat{\beta\pi}' = 75°$

(J) [6 ; 0 ; 0] $\widehat{\alpha\pi} = -30°$ $\widehat{\beta\pi} = -120°$

SOLUÇÃO: (fig. 364)

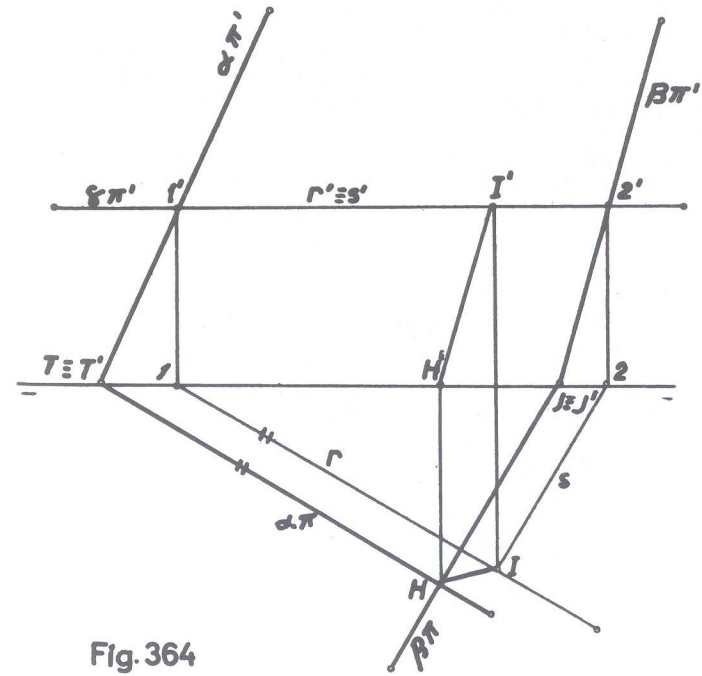



Fig.364

Verifica-se pelos dados que os dois traços verticais dos planos não se encontram nos limites da épura. Tem-se apenas um ponto da interseção que é o ponto de concurso dos traços horizontais H, que faz conhecer H' sobre a linha de terra.Usando-se um plano horizontal(γ)auxiliar, teremos nas horizontais (r) e (s) as interseções do plano(γ) com os planos(α)e(β)dados, e, em I o ponto de encontro das suas projeções horizontais que fornece I' sobre o traço vertical do plano auxiliar. A reta (H)(I) é a interseção desejada.

OBS.: No início do estudo sobre "interseção de planos" na letra A, foi esclarecido que, para se obter a interseção de dois planos, bastava determinar dois pontos que fossem comuns aos planos ou apenas um ponto desde que conhecida a direção da interseção. Então, quando os traços de mesmo nome de dois planos não se encontram nos limites da épura, podemos empregar outra solução que não a exposta no exercício 101.
Sejam os planos (α) e (β) cujos traços horizontais por exemplo, não se encontram nos limites da épura (fig. 365). Como os traços verticais de (α) e (β) se cruzam em V' que dá V sobre ππ', esse ponto (V) já é um ponto da interseção procurada, como sabemos. E, como as interseções de dois planos paralelos com um terceiro plano são duas retas paralelas, utiliza-se um plano auxiliar (γ) que seja paralelo ao plano (β), por exemplo. Esse plano (γ) intercepta o plano (α) segundo a reta (V_1)(H_1) à qual a interseção procurada será paralela. Tem-se assim um ponto da interseção desejada que é o ponto (V) e a sua direção, que é a reta (V_1)(H_1). Basta então pelo ponto (V) traçar a reta (r) paralela à reta (V_1)(H_1) e que é a solução.

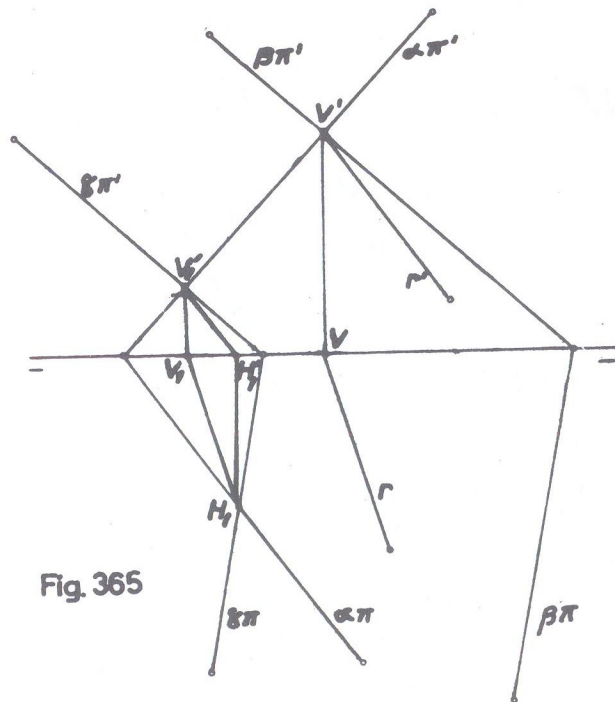



Fig. 365

102 • Achar a interseção de dois planos (α) e (β) cujos traços não se encontram nos limites da épura.

(Exercício sem coordenadas).

SOLUÇÃO: (fig. 366)

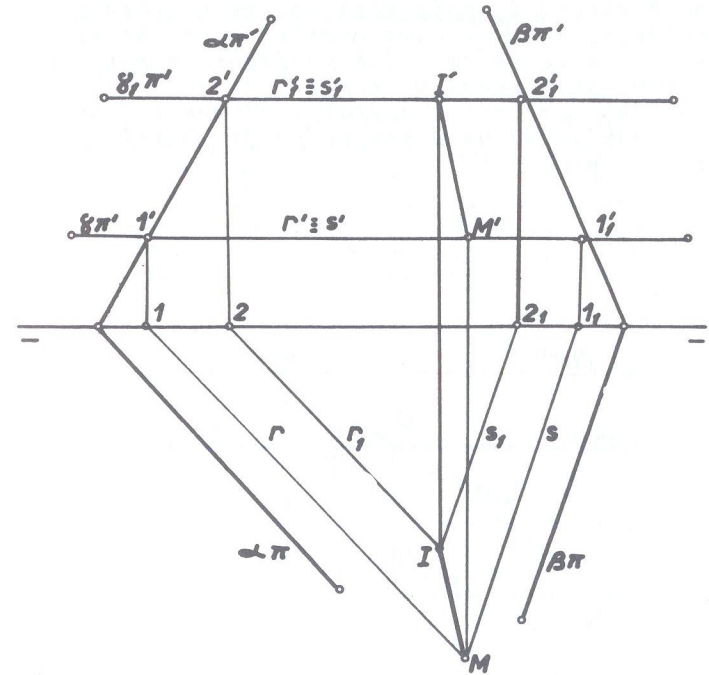



Fig. 366

Exercício semelhante ao anterior. Não se possuindo diretamente nenhum ponto da interseção, são necessários dois planos horizontais auxiliares, obtendo-se assim os dois pontos da interseção desejada que, unidos, fornecem a reta solução (M)(I).

103 • Determinar a interseção de um plano horizontal (α) de cota igual a 2, com um plano (β) paralelo ao (β_P) de cota igual a 3. (a unidade é o cm).

SOLUÇÃO: (fig. 367)

Do plano (β) só foi dada a cota; mas, sendo paralelo ao (β_P), é paralelo a $\pi\pi'$ e de traços simétricos em relação a linha de terra. A reta interseção de um planohorizontal com um plano paralelo à linha de terra, evidentemente só poderá ser uma frontohorizontal e que terá sua projeção vertical sobre o traço do plano horizontal, pois será uma reta desse plano. Usando-se um plano qualquer (γ) como auxiliar, produzirá duas interseções com os planos dados cujas projeções horizontais se interceptam em M que fornece M' sobre o traço $\alpha\pi'$. Desse ponto (M) traça-se a frontohorizontal (r) que é a solução.
Obs: Poderia ser usado um plano de perfil auxiliar, como se fará no exercício a seguir.

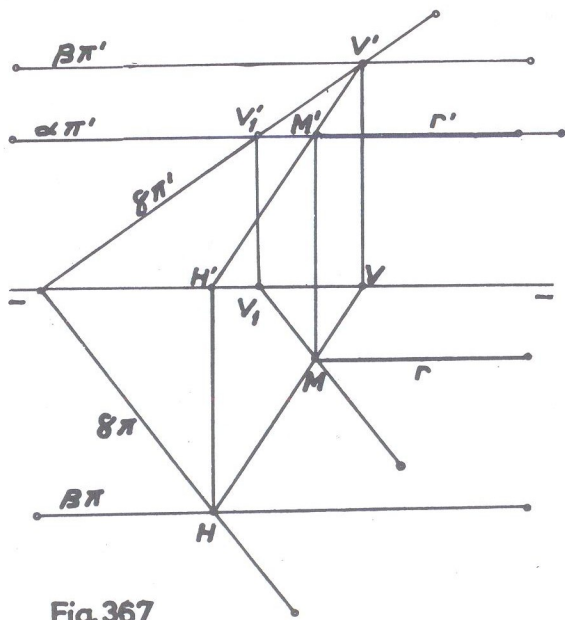
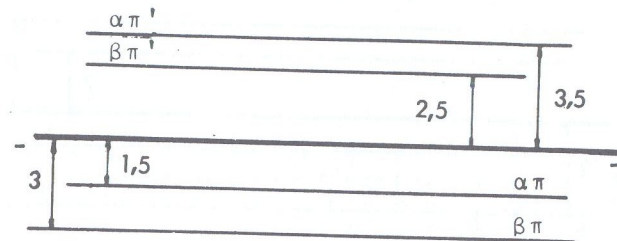



Fig. 367

104 • Determinar a interseção de dois planos (α) e (β) paralelos a linha de terra segundo o diagrama abaixo:

SOLUÇÃO: (fig. 368)

Usou-se agora, como plano auxiliar, o de perfil(γ)mas poderia igualmente ter sido utilizado um qualquer, como no exercício anterior. Esse plano auxiliar intercepta cada plano dado, segundo as retas $V'H_1$ e $V_1'H_3$ que se interceptam em (I). Desfeito o rebatimento do plano de perfil temos as projeções I e I' por onde passam as projeções da interseção pedida que, como é evidente, só pode ser uma fronto horizontal.

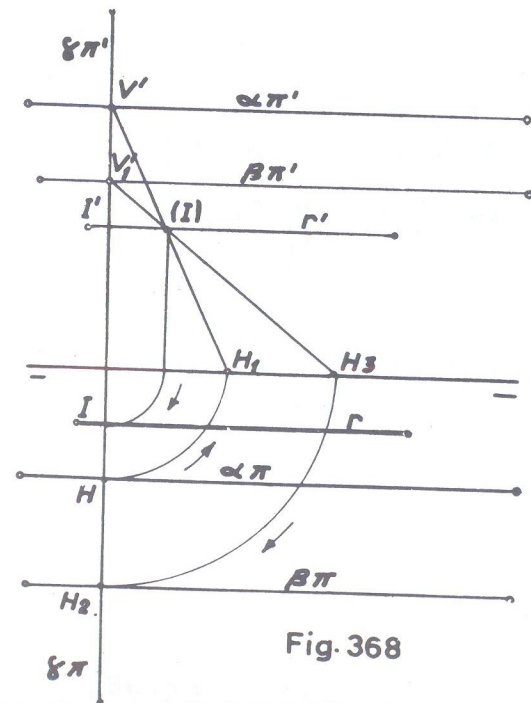
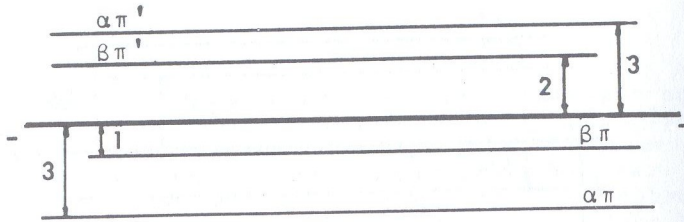



Fig. 368

105 • Mesmo exercício anterior, porém os planos dispostos segundo o diagrama abaixo:

SOLUÇÃO: (fig. 369)

Utilizando-se como plano auxiliar o qualquer(γ)de traços concorrentes em (T), este plano intercepta os planos dados, segundo as retas quaisquer (V)(H) e (V_1)(H_1). O ponto de concurso das projeções horizontais é I, na mesma linha de chamada de I' que é o ponto de concurso das projeções verticais daquelas interseções. A reta frontohorizontal do 2º diedro traçada pelo ponto (I) é a solução.
A solução seria a mesma se fosse empregado um plano de perfil auxiliar.

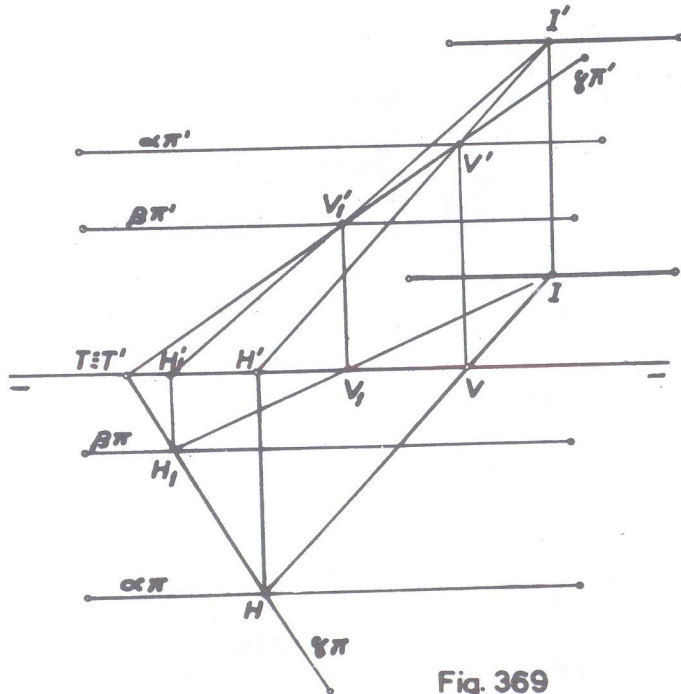



Fig. 369

106 • Achar a interseção de um plano (α) paralelo a linha de terra com o (β_I)

$\alpha\pi' = 3$

$\alpha\pi = 2$

SOLUÇÃO: (fig. 370)

Usando-se um plano de perfil(γ)auxiliar, suas interseções com os planos dados, após seu rebatimento, são V'H_1 com(α) e O(B_1) que forma o ângulo de 45º com ππ' com o(β_I), as quais se interceptam em (M_1) que fornecem M e M' desfazendo-se o rebatimento. Por M e M' traçam-se as projeções da frontohorizontal solução.

Fig. 370

107 • Determinar a interseção de um plano (α) que contém o ponto (T) com o plano definido pela linha de terra e o ponto (A).

(A) [4 ; 1 ; 2] $\widehat{\alpha\pi'} = 45°$

(T) [0 ; 0 ; 0] $\widehat{\alpha\pi} = -35°$

SOLUÇÃO: (fig. 371)

Se um dos planos passa pela linha de terra, o próprio ponto (T) de concorrência dos traços do plano(α) já é um ponto da interseção procurada, bastando, pois, procurar apenas mais um ponto dessa interseção, o que se consegue com um plano auxiliar(γ)horizontal. A interseção desse plano auxiliar com o plano(α)é a horizontal (r) e com o plano $\pi\pi'$ (A) é a frontohorizontal cujas projeções passam pelas projeções do ponto. Essas interseções têm em (M) o seu ponto comum, definido pelas projeções M e M' que, unidas ao ponto T ≡ T' determinam a reta MT, M'T' que é a interseção desejada.

Fig.371

108 • Dois planos quaisquer (α) e (β) concorrem no mesmo ponto (T) da linha de terra e seus traços de nomes contrários coincidem. Determinar a interseção de ambos, sabendo-se que o plano (α) contém o ponto (A).

(T) [0 ; 0 ; 0] $\widehat{\alpha\pi} = -25°$

(A) [4 ; 1 ; 2]

SOLUÇÃO: (fig.372)

Determinado o traço $\alpha\pi$ pelo ângulo que ele forma com a linha de terra, traça-se por A a projeção horizontal de uma horizontal (r) auxiliar, cuja projeção vertical passará por A' e assim, pelo traço vertical V' dessa horizontal auxiliar, passará o traço vertical do plano(α).

O plano(β)é facilmente determinado, por se saber que seus traços concorrem no mesmo ponto (T) com o plano(α) e que os traços de nomes contrários coincidem. Tendo-se os dois planos(α) e(β) passa-se um plano horizontal auxiliar(γ)e determinam-se as interseções desse plano auxiliar com os planos dados, que são as horizontais (r) e (s) cujas projeções verticais estão sobre o traço vertical do plano(γ). Como o ponto (T) já é um ponto da interseção, basta uni-lo ao ponto (I) de encontro das projeções horizontais das horizontais (r) e (s). A reta(I)(T) é a solução.

Fig.372

109 • Determinar a interseção do plano (α) perpendicular ao (β_P) que contém a reta (A)(B), com o plano (β) paralelo à linha de terra que contém a reta (B)(C). Assinalar somente, da interseção, o segmento no 1º diedro.

(A) [3 ; 1 ; 1]
(B) [5 ; 4 ; 2]
(C) [6 ; 2,5 ; 0]

SOLUÇÃO: (fig. 373)

Pelos traços H e V' da reta (A)(B) passam os traços do plano (α) que, por ser perpendicular ao (β_P) tem seus traços em linha reta. O plano (β) paralelo à linha de terra, tem seus traços passando pelos traços da reta (B)(C), que são C ≡ H_1 e V_1'. Determinados os traços dos planos (α) e (β), a interseção é imediata, na reta (1)(2) no 4º diedro e onde se têm em r e r' as projeções no 1º diedro.

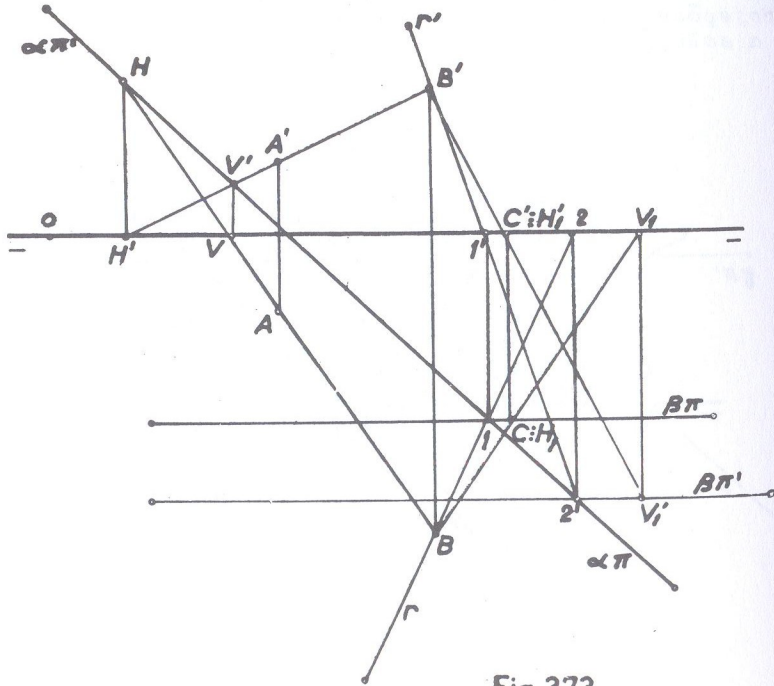



Fig. 373

110 • Determinar a interseção de um plano (α) que contém o ponto (T) com outro dado pela sua reta de máximo declive (A)(B).

(T) [0 ; 0 ; 0] $\widehat{\alpha\pi}' = 50°$
(A) [4 ; 0 ; 2,5] $\widehat{\alpha\pi} = -60°$
(B) [6 ; 1 ; 1,5]

SOLUÇÃO: (fig. 374)

Não há necessidade de determinar os traços do plano definido pela reta de máximo declive. É suficiente fazer passar dois planos horizontais auxiliares por dois pontos quaisquer da reta (A)(B). No caso, fizemos passar por esses dois pontos, cujas interseções com o plano(α) são as horizontais V1, V'1' e $V_1$2, V_1'2', situando-se os pontos 1 e 2 nas interseções das projeções horizontais das horizontais, com as perpendiculares à AB traçadas pelos pontos A e B respectivamente. A reta (1)(2) é a solução.

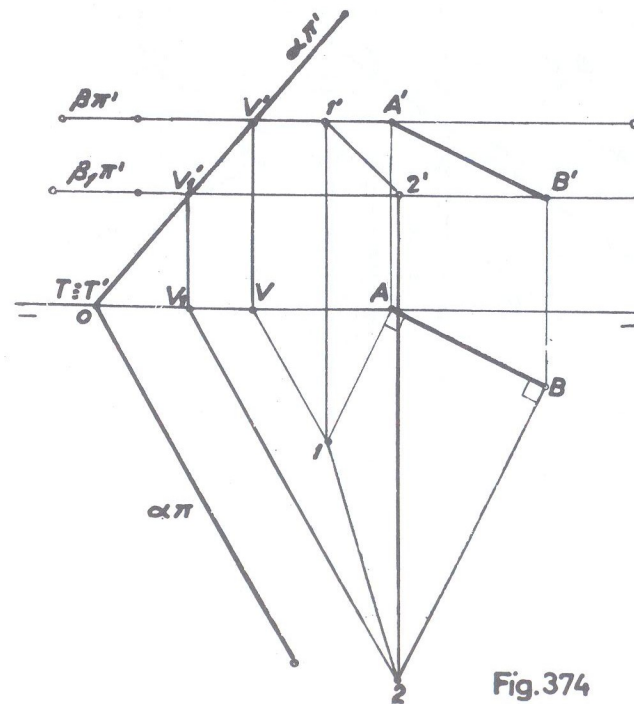



Fig. 374

111 • Achar a reta comum aos planos, (α) que contém o ponto (T) e o definido pelas retas (A)(B) e (B)(C).

(T) [0 ; 0 ; 0] (C) [11 ; 3,5 ; 4,5]
(A) [6 ; 2 ; 2] $\widehat{\alpha\pi'}$ = 35º
(B) [8 ; 0 ; 1] $\widehat{\alpha\pi}$ = -45º

SOLUÇÃO: (fig. 375)

Como no exercício anterior, não é necessário determinar os traços do plano definido pelas retas. É suficiente passar dois planos horizontais auxiliares, (β) e (β_I) e determinar a interseção de cada um desses planos auxiliares com os planos dados. As projeções horizontais das horizontais resultantes do primeiro plano auxiliar (β) encontram-se em M que dá M' sobre (βπ'). As projeções horizontais das horizontais resultantes do segundo plano auxiliur (β_I) encontram-se em N que dá N' sobre ($\beta_I\pi'$). A reta (M)(N) pelas suas projeções MN e M'N' é a interseção desejada.

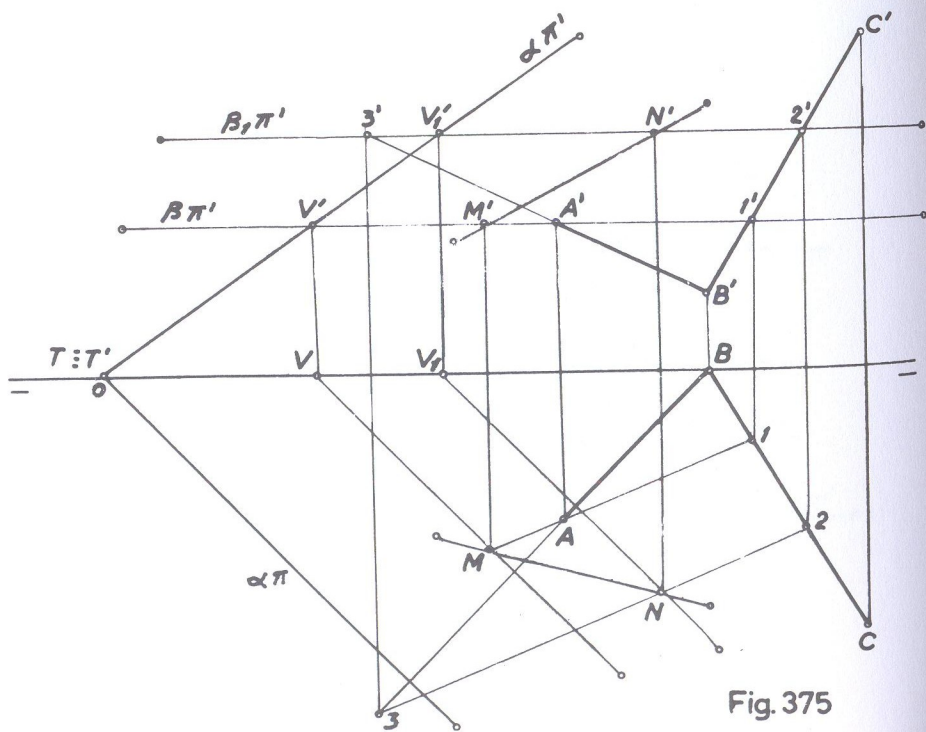



Fig. 375

112 • Determinar a interseção de um plano (α) com os traços em linha reta e que contém o ponto (T), com o definido pelos pontos (A), (B) e (C).

(T) [3 ; 0 ; 0] (C) [6,5 ; -2,5 ; -4]
(A) [0 ; -1 ; 3,5] $\widehat{\alpha\pi'}$ = 45º
(B) [2,5 ; 2,5 ; 5]

SOLUÇÃO: (fig. 376)

O problema é inteiramente idêntico ao exercício anterior. Fizemos passar dois planos horizontais auxiliares e determinamos as interseções desses planos auxiliares com os planos dados. Com o primeiro plano auxiliar determina-se o ponto (M) pelas suas projeções M e M' e com o segundo plano, o ponto (N) pelas suas projeções N e N'. A reta (M)(N) é a solução.

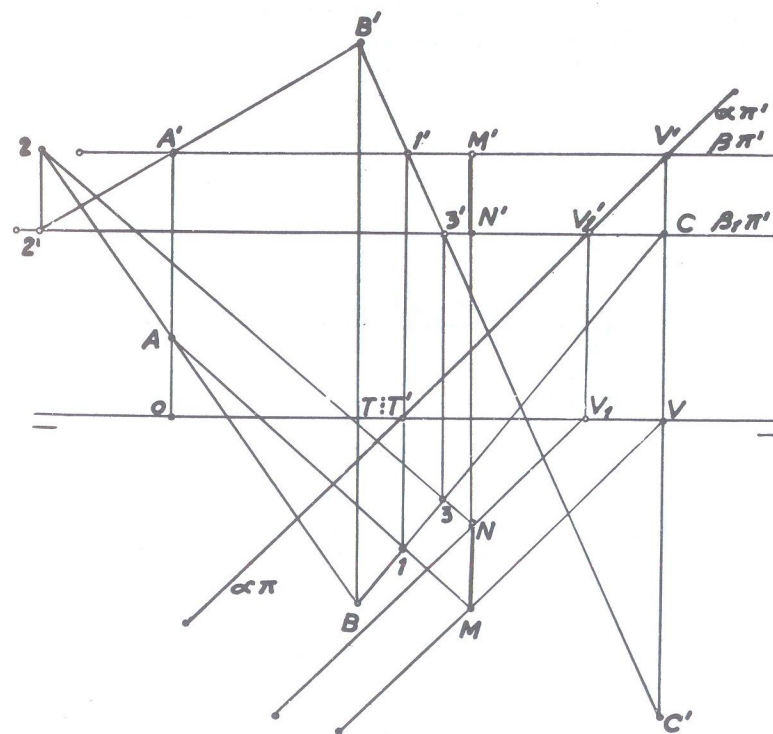
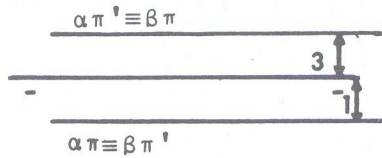



Fig. 376

113 • Determinar a interseção de dois planos paralelos à linha de terra, sabendo-se que coincidem seus traços de nome contrário segundo o diagrama abaixo.

SOLUÇÃO: (fig. 377)

Um plano qualquer (γ) auxiliar intercepta os dois planos dados segundo as retas (V)(H) e (V_1)(H_1) e as projeções dessas retas se encontram em um mesmo ponto de onde se traça a reta interseção pedida, que é uma frontohorizontal do 4º diedro com as projeções em coincidência.

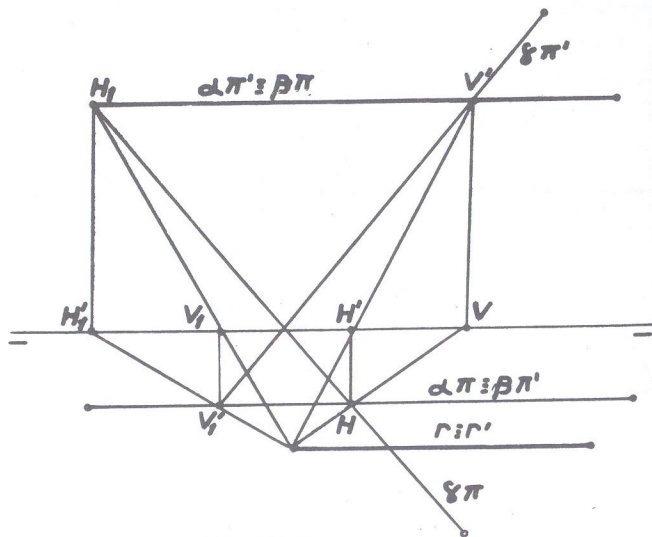



Fig. 377

114 • Determinar a interseção de um plano de topo (α) que contém o ponto (T) com o definido pelas retas paralelas (A)(B) e (C)(D).

(T) [0 ; 0 ; 0] (C) [3 ; ? ; ?]
(A) [1 ; 4 ; 3] (D) [7 ; 0 ; 2]
(B) [4 ; 1 ; 1] $\widehat{\alpha\pi'} = 45º$

SOLUÇÃO: (fig. 378)

Um primeiro plano horizontal auxiliar(β)intercepta o plano de topo, segundo a reta de topo (r) cuja projeção puntual r' se situa no ponto de concorrência dos traços απ' e βπ' e o plano das paralelas, segundo a horizontal (B)(E), de projeções B'E' e BE sendo B'E' coincidente com o traço βπ'. As duas projeções horizontais dessas interseções, se interceptam em M que fornece M' em coincidência com r' sobre βπ'

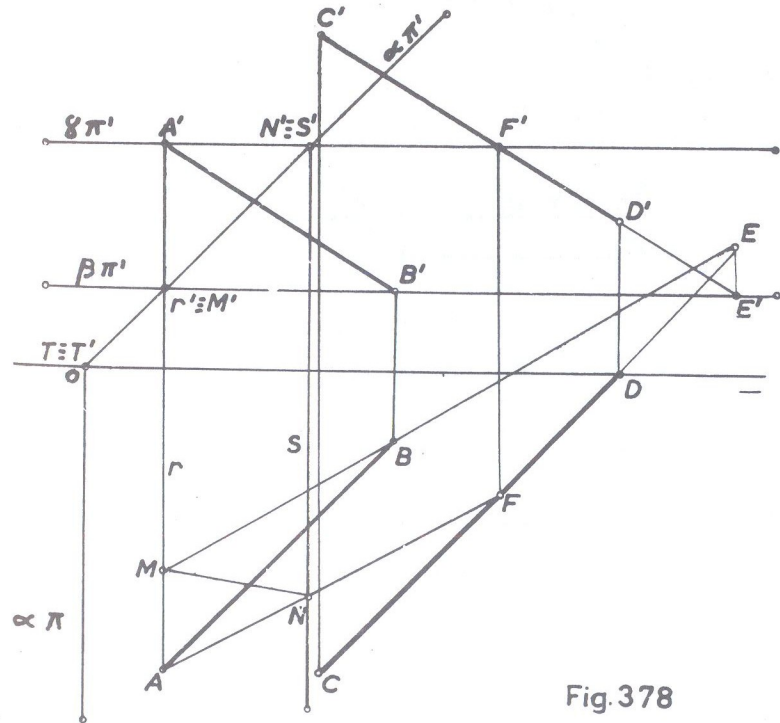



Fig. 378

Um segundo plano horizontal auxiliar (γ) determina igualmente com os planos dados, duas interseções, que são: a de topo

(s) com o plano de topo e a horizontal (A)(F) com o das paralelas, interseções essas que têm em N o ponto de concorrência das projeções horizontais que fornece N' em coincidência com s'.
A reta (M)(N), pelas projeções MN, M'N' é a solução, onde M'N' está sobre o traço απ'.

115 • Determinar a interseção de um plano horizontal (α) com o definido pelas retas (A)(B) e (C)(D) frontohorizontais.

(A) [0 ; 1 ; 2,5] (D) [3,5 ; ? ; ?]
(B) [3 ; ? ; ?] cota de απ' = 3
(C) [1,5 ; 2 ; 1]

SOLUÇÃO: (fig. 379)

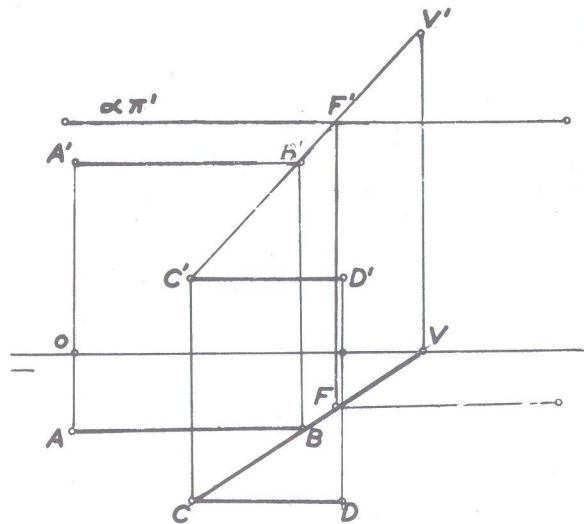



Fig. 379

Traça-se uma reta auxiliar qualquer, (C)(B) por exemplo, que pertença ao plano definido pelas frontohorizontais e determina-se F' sobre απ' que faz conhecer F sobre a projeção CB (no caso, no prolongamento de CB). Esse ponto (F) é um ponto da interseção, que só pode ser uma frontohorizontal, traça-se por ele a reta pedida.

116 • Determinar a interseção de um plano de perfil (α) que passa pelo ponto (T), com outro definido pelos pontos (A), (B) e (C) do qual não se pode utilizar os traços.

(T) [1 ; 0 ; 0] (B) [2 ; 2,5 ; 1,5]
(A) [0 ; 2 ; 1] (C) [3,5 ; 1 ; 0,5]

SOLUÇÃO: (fig. 380)

A reta (A)(B) e o plano de perfil têm em (2) um ponto de cruzamento e que é portanto um ponto da interseção.
A reta (B)(C) e o mesmo plano de perfil têm em (1) um ponto de cruzamento e que é outro ponto de interseção. A reta de perfil (1)(2) é a pedida.

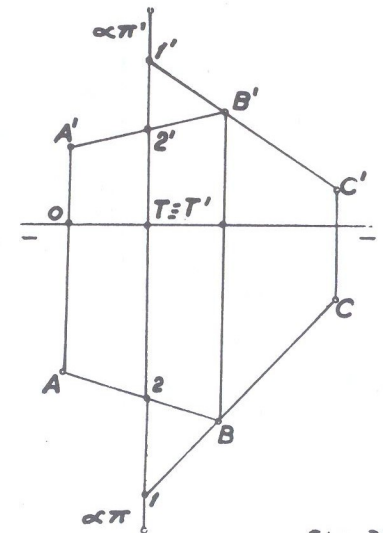



Fig. 380

117 • Determinar a interseção de um plano vertical (α) que contém o ponto (T) com outro definido por um ponto (M) e uma reta (B)(C).

(T) [1,5 ; 0 ; 0] (C) [5,5 ; 1,5 ; 1,5]
(M) [0 ; 2,5 ; 1,5] $\hat{\alpha\pi}$ = -40º
(B) [3 ; 0,5 ; 3,5]

SOLUÇÃO: (fig. 381)

Utilizando-se como plano auxiliar o frontal(β), este intercepta o plano definido pelo ponto e reta dados, segundo a frontal cujas projeções são 1C e 1'C' e o plano vertical (α) segundo a vertical cuja projeção o puntual é I que é também o ponto de encontro das duas projeções horizontais e que dá I' sobre 1'C'. É já um ponto de interseção procurada.
Operando-se de maneira idêntica com um segundo plano frontal ($β_1$) auxiliar, o ponto comum é K que fornece K' sobre M'2' e que é outro ponto da interseção procurada. Unindo-se os dois, temos a reta solução (I)(K) pelas projeções IK, I'K'.

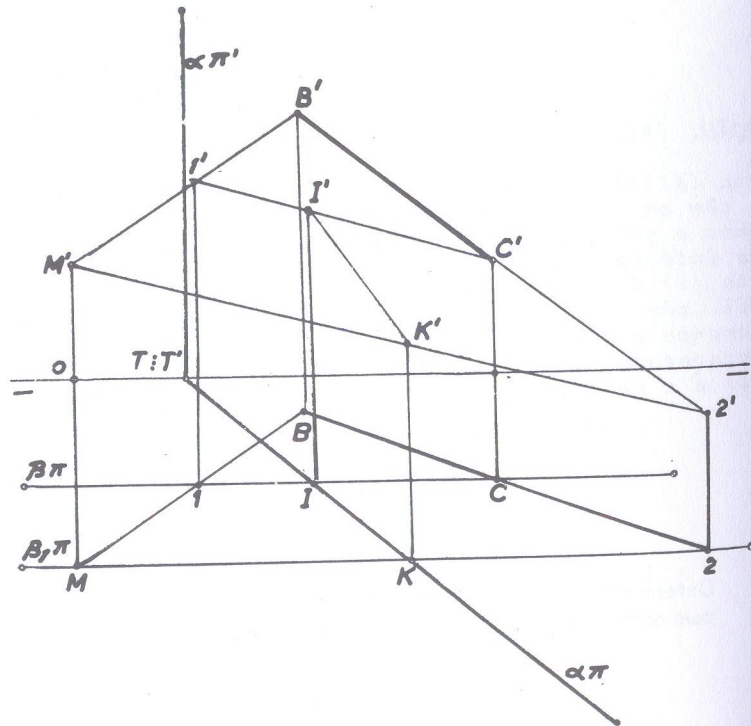



Fig.381

118 • Determinar a interseção de um plano qualquer (α) que contém o ponto (T) com o ($β_P$)

(T) [0 ; 0 ; 0]

$\widehat{\alpha\pi}' = 40º$

$\widehat{\alpha\pi} = -50º$

SOLUÇÃO: (fig. 382)

Toma-se arbitrariamente um ponto (A) que pertença ao ($β_P$) e procede-se como no exercício número 107.
Como o plano bissetor passa pela linha de terra, o ponto (T) já é um ponto da interseção, e, para se obter o outro ponto, traça-se um plano horizontal (β) auxiliar, que determina com os planos dados duas interseções auxiliares, as quais têm em (B) o ponto comum. A reta (B)(T) do 2º bissetor é a interseção pedida.

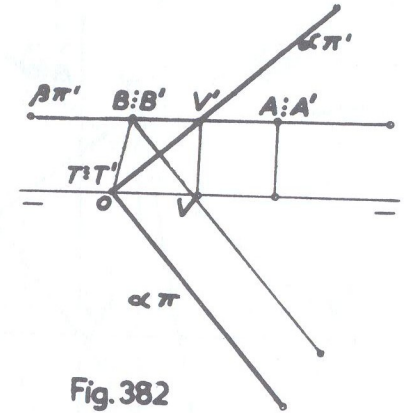



Fig.382

119 • Empregando planos verticais como auxiliares, determinar a reta comum ao plano (α) paralelo à linha de terra, com o plano definido pelas retas concorrentes (A)(B) e (B)(C) do qual não se pode determinar os traços.

(A) [2 ; 3 ; 0] απ' = 2,5

(B) [5 ; 1,5 ; 4] απ = 4

(C) [10 ; 2 ; 0]

SOLUÇÃO: (fig. 383)

Utilizamos agora, como plano auxiliar, o vertical (β). Procurando-se as interseções desse plano auxiliar com os planos dados, obtém-se: com o plano paralelo à linha de terra a reta (V)(H) que é imediata. Com o plano das retas tem-se: o traço horizontal do plano interceptou as duas projeções de mesmo nome das retas em A e D que dão respectivamente A' e D' sobre A'B' e B'C' (esta última no seu prolongamento). As duas projeções

verticais dessas interseções auxiliares, que são H'V' e A'D' se cruzam em M' que fornece M sobre o traço horizontal do plano auxiliar. Esse ponto (M) é um ponto da interseção procurada. Um outro plano (β) paralelo ao primeiro determina de modo inteiramente idêntico, um segundo ponto (N) da interseção desejada. Unindo-se (M)(N) temos a solução pelas suas projeções MN, M'N'

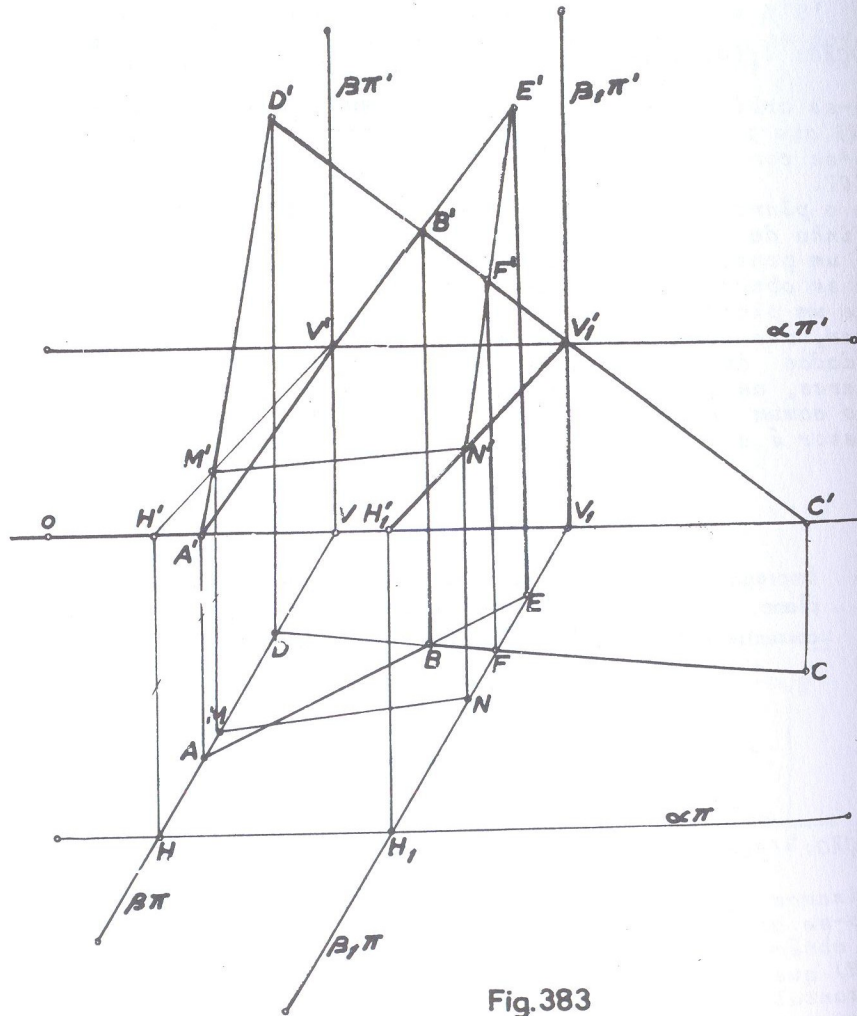



Fig.383

Obs. Nesse exercício foram empregados planos verticais como auxiliares, por imposição dos dados, mas se empregarmos planos de topo, por exemplo, a solução será a mesma evidentemente. Na fig. 384, o mesmo exercício com planos de topo auxiliares. O primeiro plano auxiliar fornece (M) como um ponto da interseção desejada e o segundo, (N). A reta (M)(N) é a solução.

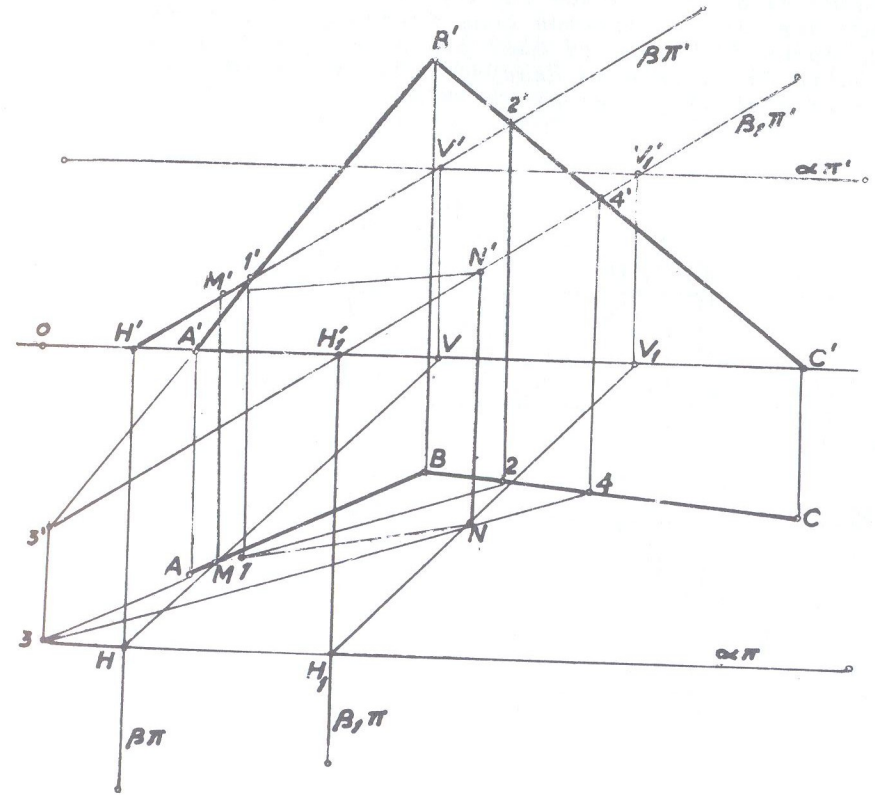



Fig.384

120 • Determinar a interseção de dois planos dados pelas retas concorrentes (A) (B) e (B)(C) e (D)(E) e (E)(F)

(A) [0 ; 2 ; 1]
(B) [2,5 ; 0,5 ; 3,5]
(C) [4,5 ; 3 ; 1,5]
(D) [5,5 ; 3,5 ; 4]
(E) [8 ; 0 ; 1]
(F) [10 ; 1,5 ; 3]

SOLUÇÃO: (fig. 385)

Um primeiro plano horizontal auxiliar(α) fornece as seguintes interseções: (1)(C) com o plano das retas (A)(B) e (B)(C) e (2)(3) com o das retas (D)(E) e (E)(F) cujas projeções horizontais se cortam em M que dá M' sobre o traço do plano (α). Esse ponto (M) é pois, um ponto da interseção procurada. Operando de modo idêntico com um segundo plano auxiliar (β), também horizontal, teremos duas interseções auxiliares cujo ponto comum é (N), pelas suas projeções N e N' e que é o outro ponto da interseção desejada. Unindo-se (M)(N) tem-se a reta solução pelas projeções MN, M'N'.

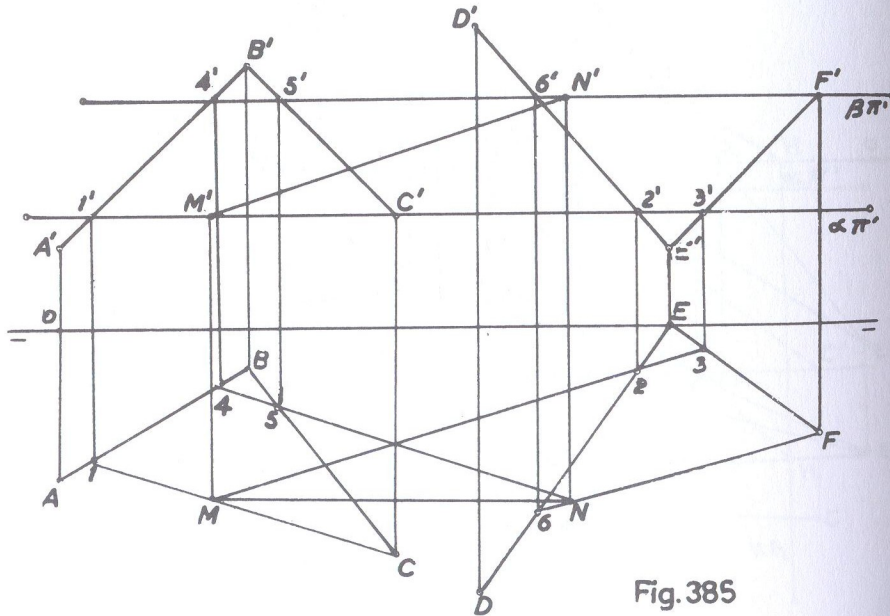



Fig.385

121 • Determinar a interseção de um plano definido por duas retas paralelas (A)(B) e (C)(D) com outro definido pela reta de máximo declive (E)(F), dos quais não se pode determinar os traços.

(A)	[0 ; 1 ; 1,5]	(D)	[4 ; ? ; ?]
(B)	[3 ; 0,5 ; 3]	(E)	[6 ; 0 ; 3]
(C)	[1,5 ; 2 ; 1,5]	(F)	[8,5 ; 3 ; 1]

SOLUÇÃO: (fig. 386)

Procede-se de modo idêntico ao exercício anterior, com o emprego de dois planos horizontais auxiliares(α)e(β), os quais determinam interseções auxiliares cujos pontos comuns são respectivamente (M) e (N), como o fizemos no exercício anterior. A reta (M)(N) pelas suas projeções MN e M'N' é a interseção procurada.

Obs: Tratando-se de plano definido pela reta de máximo declive, as projeções horizontais das horizontais interseções com os planos auxiliares são perpendiculares à projeção horizontal EF da reta de máximo declive.

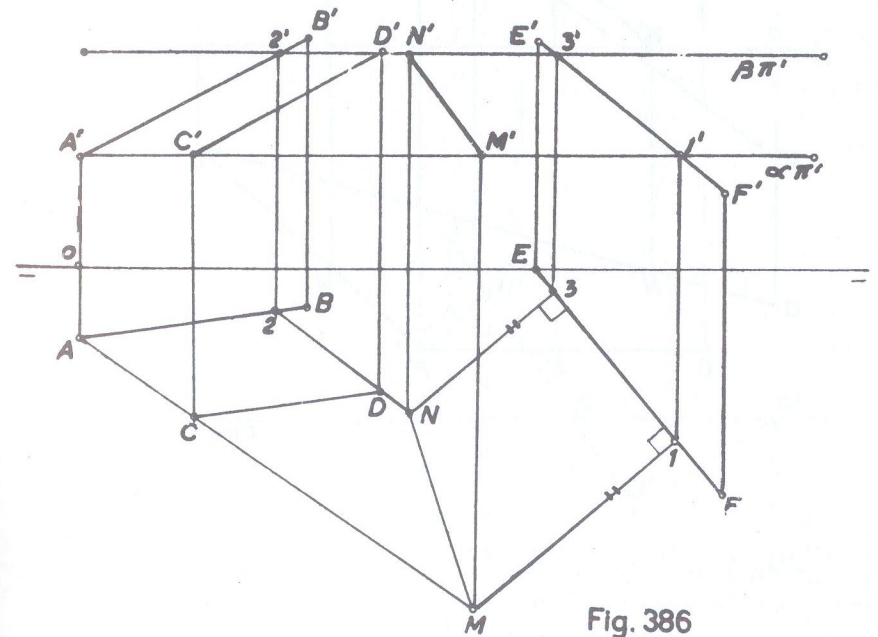



Fig. 386

122 • Determinar a interseção do (β_I) com o plano definido pelo ponto (M) e a reta (A)(B) do qual não se pode achar os traços.

(A)	[9 ; 1 ; 5]
(B)	[0 ; 3,5 ; -1,5]
(M)	[6 ; 3 ; 4]

SOLUÇÃO: (fig. 387)

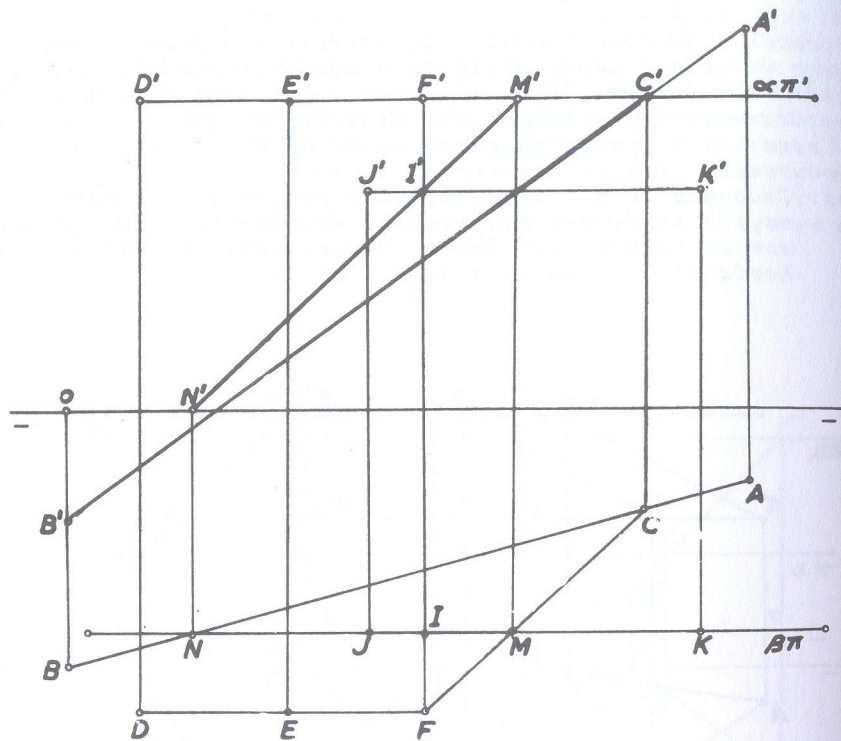



Fig. 387

Por M' (projeção vertical do ponto que com a reta define o plano), faz-se passar um plano horizontal auxiliar (α) e determina-se sua interseção com os planos dados. Com o plano definido pelo ponto e reta, a interseção é a horizontal (M)(C), de projeções MC, M'C' e, com o 1º bissetor é a frontohorizontal de projeções DE, D'E' que têm em F seu ponto comum, que faz conhecer F' sobre o traço do plano auxiliar e que é um ponto da interseção procurada. A frontohorizontal acima descrita tem suas projeções eqüidistantes da linha de terra e os pontos (D) e (E) são tomados arbitràriamente.
Procede-se de modo idêntico com um segundo plano frontal auxiliar (β), passando por M, cuja interseção com o plano definido pelo ponto e reta é a frontal de projeções MN e M'N' e com o 1º bissetor, a frontohorizontal de projeções JK, e J'K' e-

qüidistantes da linha de terra, sendo I' o ponto de encontro das projeções verticais dessas duas últimas interseções auxiliares, que fornece I sobre o traço do plano auxiliar, sendo assim (I) o outro ponto procurado. Unindo-se (F)(I) tem-se em FI, F'I' a reta solução.

123 • Determinar a interseção de dois planos definidos, um, pela reta de máximo declive (A)(B) e o outro, pela de máxima inclinação (C)(D).
Obs: Não utilizar os traços dos planos.

(A) [0 ; 2,5 ; 0] (C) [6 ; 2 ; 0]
(B) [3 ; 0 ; 3] (D) [9 ; 0 ; 2]

SOLUÇÃO: (fig. 388)

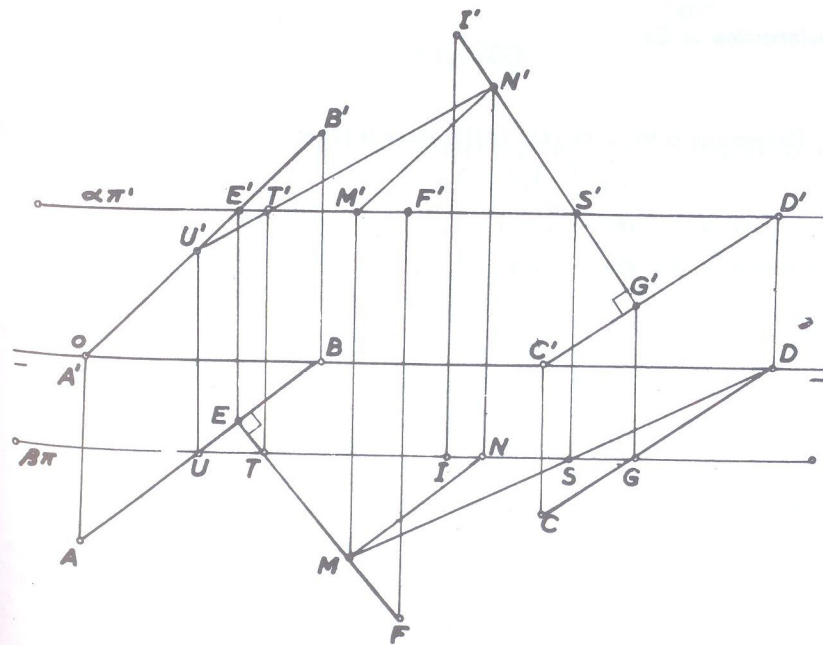



Fig. 388

Traça-se um plano horizontal auxiliar (α), cuja interseção com o plano definido pela reta (A)(B) é a horizontal (E)(F) pelas suas projeções EF e E'F' (a projeção EF perpendicular a AB por ser esta de máximo declive). A seguir, traça-se um segundo plano auxiliar (β), frontal, cuja interseção com o plano definido pela reta (C)(D) é a frontal de projeções IG, I'G', (a projeção I'G' perpendicular a C'D' por ser (C)(D) de máxima inclinação).
Ficamos então em presença de dois planos definidos pelas retas concorrentes (B)(E)(F) e (I)(G)(D).
O plano (α) corta o plano (B)(E)(F) no ponto (E) de concorrência e o plano (I)(G)(D) segundo a horizontal (S)(D) de projeções SD, S'D' onde a projeção SD encontra EF em M que dá M' sobre o traço do plano e que é um ponto da interseção desejada.
O plano (β) corta o plano (I)(G)(D) no ponto (G) de concorrência e o plano (B)(E)(F) segundo a frontal de projeções UT e U'T' onde a projeção vertical U'T' encontra I'G' em N' que dá N sobre o traço do plano e que é o outro ponto da interseção procurada.
Unindo-se os dois pontos (M)(N) assim obtidos, têm-se em MN, M'N', as projeções que solucionam.

- referentes a B)

124 • Determinar o traço da reta (A)(B) sobre o plano (α) que contém o ponto (T).

(A) [-1,5 ; 3 ; 2] $\widehat{\alpha\pi'}$ = 30º
(B) [2 ; 1 ; 0,5] $\widehat{\alpha\pi}$ = -35º
(T) [-2,5 ; 0 ; 0]

SOLUÇÃO: (fig. 389)
Como foi explicado na execução da fig. 339, faz-se passar pela reta (A)(B) o seu plano projetante (β), de topo, cuja interseção com o plano dado é a reta (V)(H) de projeções VH, V'H' cuja projeção horizontal VH intercepta a projeção AB da reta em I, que dá I' sobre A'B'. Esse ponto (I), comum à reta dada e à interseção obtida, é o ponto onde a reta fura o plano.

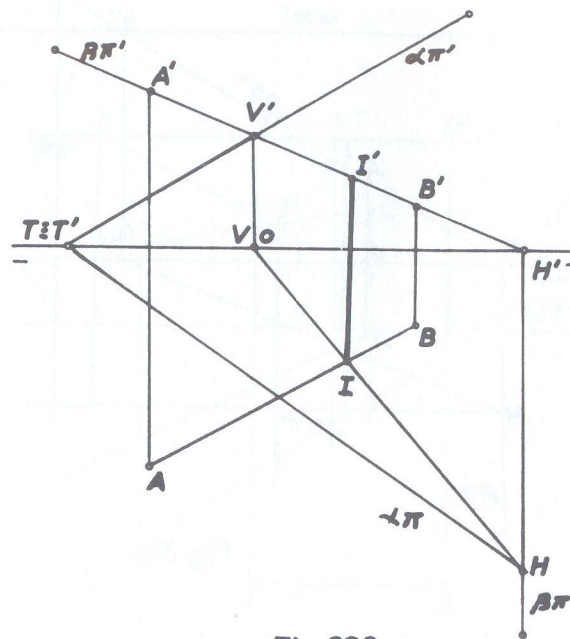



Fig. 389

125 • Determinar o traço da reta (A)(B) sobre o plano (α) paralelo à linha de terra.

(A) [0 ; 1 ; 1] απ' = 3 (cota)
(B) [4 ; 3 ; 3,5] απ = 2 (afastamento)

SOLUÇÃO: (fig. 390)
Solução idêntica ao exercício anterior. O plano projetante da reta dada, é o de topo (β) que intercepta o plano dado, segundo a reta (V)(H) de projeções VH, V'H'. Essa interseção e a reta dada têm em (I) o seu ponto comum, que é o ponto procurado.

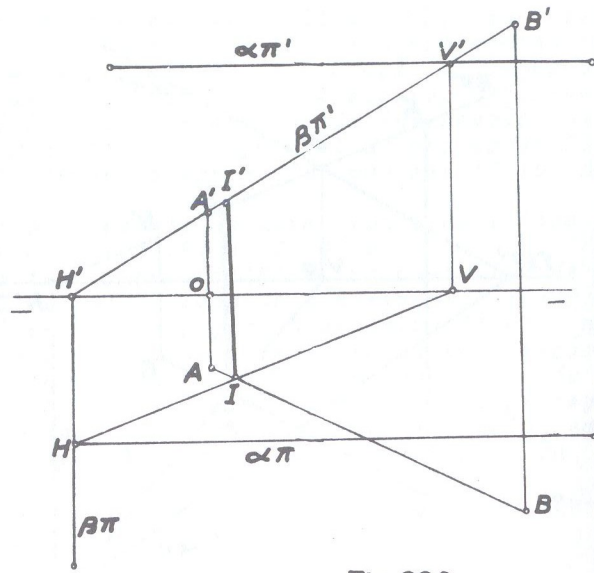



Fig.390

126 • Determinar o traço da reta (B)(C) sobre o plano ππ' (A).

(A) [-0,5 ; 3,5 ; 2,5]

(B) [-2 ; 3 ; 1]

(C) [1 ; 1 ; 1,5]

Solução: (fig. 391)

Traça-se o plano vertical (α) projetante da reta (B)(C) e pela projeção vertical A' do ponto que com ππ' define o plano dado, o plano horizontal auxiliar (β). Procurando-se a interseção de (β) com os planos (α) e ππ'(A), obtém-se:

- (A)(D) com o plano ππ'(A);
- (E)(V) com o plano (α) onde os pontos (D)e(E) foram tomados arbitrariamente.

As projeções horizontais dessas interseções se encontram em F que dá F' sobre o traço de (β).
Então, a interseção de (α) com ππ'(A) será a reta (T)(F) que tem em (I) o ponto comum com a reta dada e que é o ponto procurado.

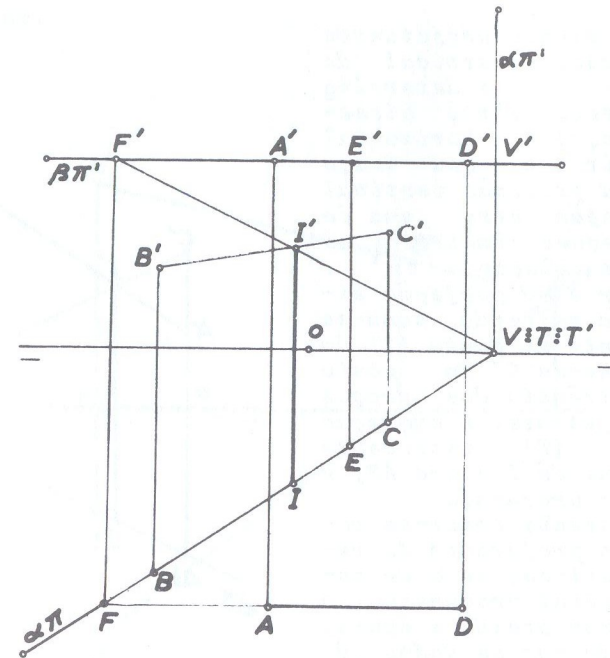



Fig. 391

127 • Determinar o ponto em que a reta (A)(B) fura o 1º bissetor.

(A) [0 ; 2 ; 1]   (B) [3 ; 0,5 ; 3]

Solução: (fig. 392)

Quando o plano é bissetor, o problema se simplifica porque esse plano sendo o lugar geométrico de todos os pontos que estão eqüidistantes dos planos de projeção, o ponto procurado deve ter suas projeções eqüidistantes da linha de terra. Traça-se

então um dos planos projetantes da reta (no caso o vertical de traços $\alpha\pi$ e $\alpha\pi'$) e determina se sua interseção com o bissetor, cuja projeção horizontal deve coincidir com o seu traço horizontal; a projeção vertical dessa interseção será uma de reta de projeções simétricas ao traço $\alpha\pi$ em relação a $\pi\pi'$. Para se obter essa projeção simétrica acima referida, toma-se arbitrariamente um ponto (C) do bissetor e une-se C' ao ponto (T) de concorrência dos traços do plano projetante. A projeção vertical de (C)(T) intercepta A'B' em I' que dá I sobre AB, e que é o ponto procurado.

OBS: É indiferente tomar-se como plano projetante da reta o vertical ou o de topo. Em geral procura-se o que melhor atenda a épura, de acordo com os dados do problema.

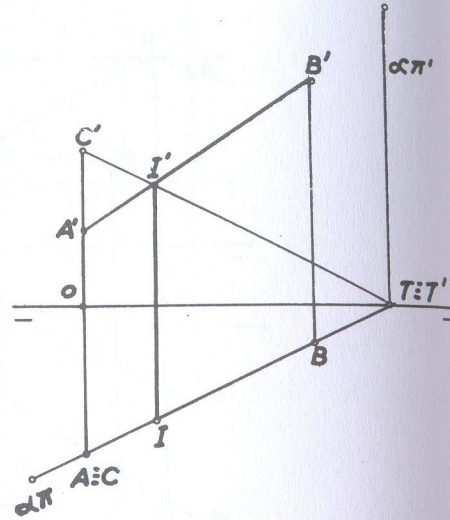



Fig. 392

128 • Determinar o ponto onde a reta (A)(B) fura o 2º bissetor.

(A) [0 ; 2 ; 3] (B) [4 ; 0 ; 2]

Solução: (fig. 393)

Nesse caso, tratando-se do (β_p), é suficiente determinar o ponto (I) de encontro das duas projeções da reta, que é o ponto procurado.

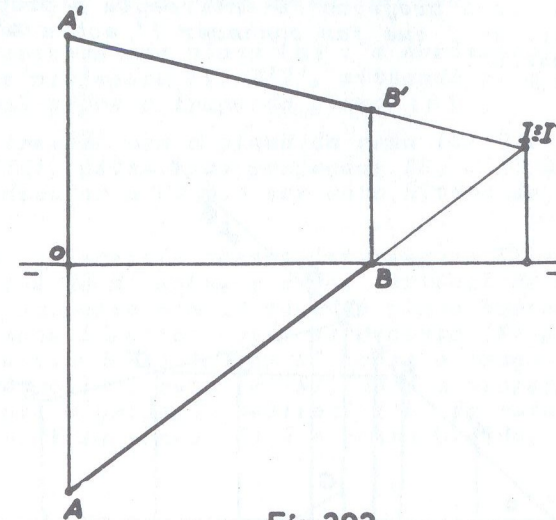



Fig. 393

129 • Determinar o traço da reta (A)(B) sobre o plano definido pelas retas concorrentes (C)(D) e (D)(E).

(A) [0,5 ; 2,5 ; 1] (D) [4,5 ; 1 ; 2]

(B) [2,5 ; 1,5 ; 3] (E) [6 ; 2 ; 1,5]

(C) [3,5 ; 2 ; 2]

Solução: (fig. 394)

Usando-se como plano projetante da reta (A)(B), o de topo(α), determinam-se os pontos F' e G' em que as projeções verticais das retas encontram o traço de mesmo nome do plano, que dão a conhecer F e G respectivamente sobre os prolongamentos de CD e ED.
Unindo-se F a G, essa projeção FG intercepta a projeção horizontal AB da reta em I que faz conhecer I' sobre A'B'. O ponto (I) é o procurado.

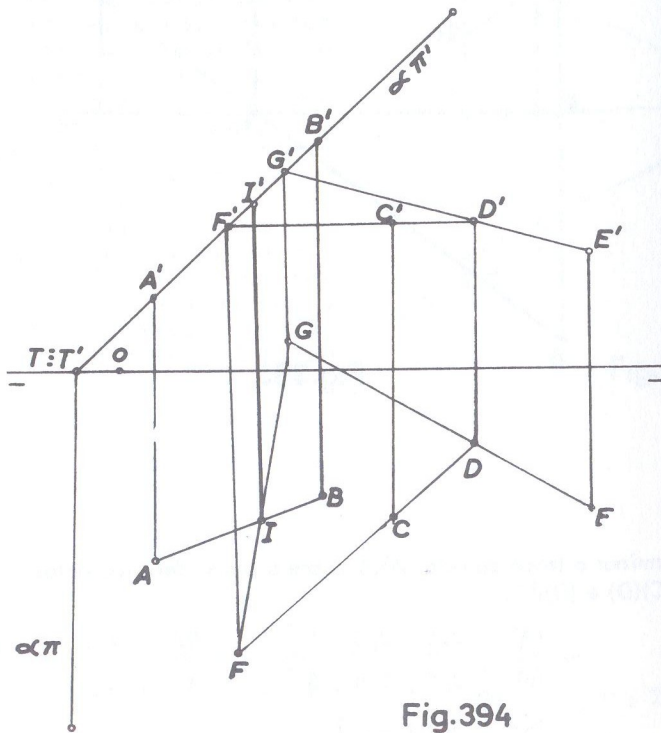



Fig.394

130 • Determinar o traço da reta (A)(B) sobre o plano definido pela reta de máximo declive (C)(D) do qual não se pode determinar os traços.

(A) [0,5 ; 2,5 ; 2,5] (C) [4,5 ; 4 ; 1]
(B) [3,5 ; 1,5 ; 1] (D) [7 ; 2,5 ; 2]

Solução: (fig. 395)

Usa-se como plano projetante da reta dada, o vertical (α). Faz-se passar um primeiro plano horizontal auxiliar (β) e determina-se sua interseção com os dois planos, isto é, o projetante e o definido pela reta de máximo declive.
Obtém-se então:

- *interseção com plano (α) : a horizontal (E)(V) pelas suas projeções EV, E'V', situando-se a projeção vertical sobre o traço do plano (β) ;*
- *interseção com o plano da reta (C)(D): a horizontal (D)(H), pelas suas projeções DH, D'H' onde DH é perpendicular a CD por ser esta última de máximo declive.*

As projeções horizontais dessas interseções EV e DH se interceptam em M que dá M' sobre o traço vertical de (β).
Procede-se igualmente com um segundo plano horizontal auxiliar (β_1) e de modo idêntico obtém-se o ponto (N) pelas suas projeções NN', situando-se também N' sobre o traço vertical do (β_1) . Temos assim a reta (M)(N), onde a projeção vertical M'N' intercepta a projeção vertical A'B' da reta dada em I' que dá I sobre AB. Esse ponto (I) é o ponto pedido.

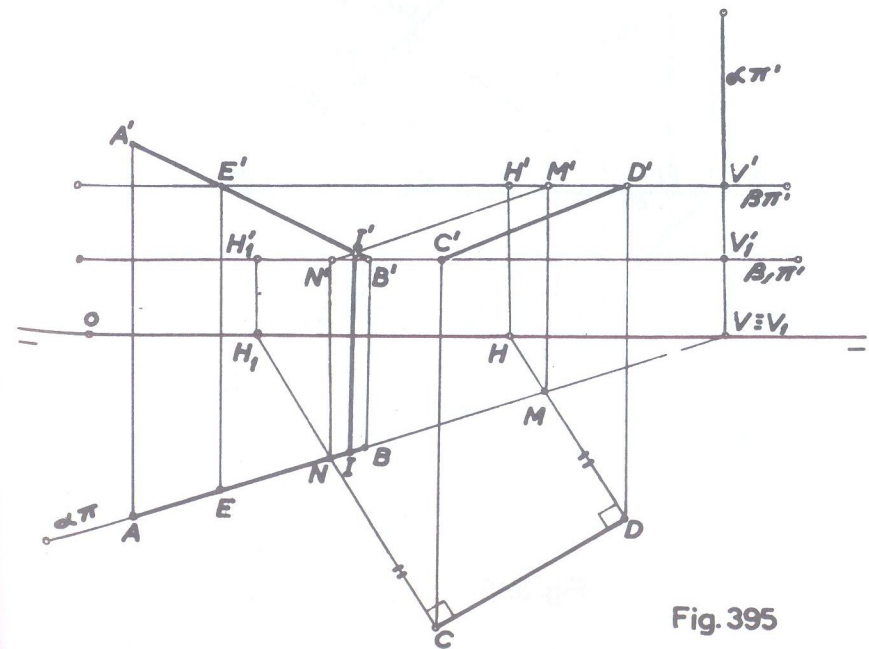



Fig.395

131 • Determinar o traço da reta frontal (A)(B) sobre o plano (α) que contém o ponto (T).

(A) [2 ; 1,5 ; 3] $\widehat{\alpha\pi}' = 35°$

(B) [4 ; ? ; 1] $\widehat{\alpha\pi} = -45°$

(T) [0 ; 0 ; 0]

Solução: (fig. 396)

Problema sem dificuldade alguma, de solução imediata. Traça-se o plano de topo (β) projetante da reta dada e determina-se sua interseção com o plano dado, que é a reta (V)(H) pelas suas projeções VH, V'H', onde a projeção horizontal VH intercepta a de mesmo nome da reta em I que dá I' sobre o traço vertical do plano. O ponto (I) é a solução.

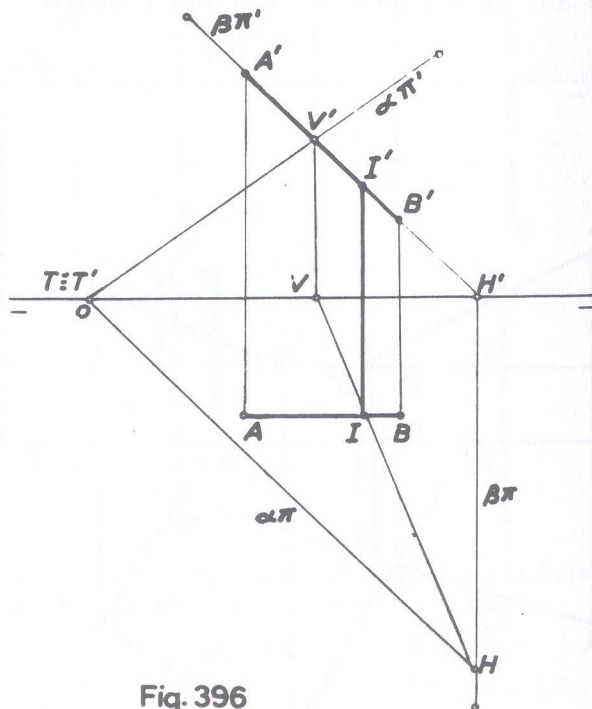



Fig. 396

132 • Determinar o traço da reta horizontal (A)(B) sobre o plano de topo (α), que contém o ponto (T).

(A) [4 ; 2 ; 3] (T) [2 ; 0 ; 0]

(B) [6 ; 0 ; ?] $\widehat{\alpha\pi}' = 40°$

SOLUÇÃO: (fig. 397)

Solução imediata. O plano vertical auxiliar (β), projetante da reta dada e o plano dado, se interceptam segundo a reta (V)(H) de projeções VH, V'H'. As duas projeções verticais, da reta dada e da interseção achada, se cruzam em I' que fornece I sobre o traço horizontal do plano projetante. Esse ponto (I) é a solução.

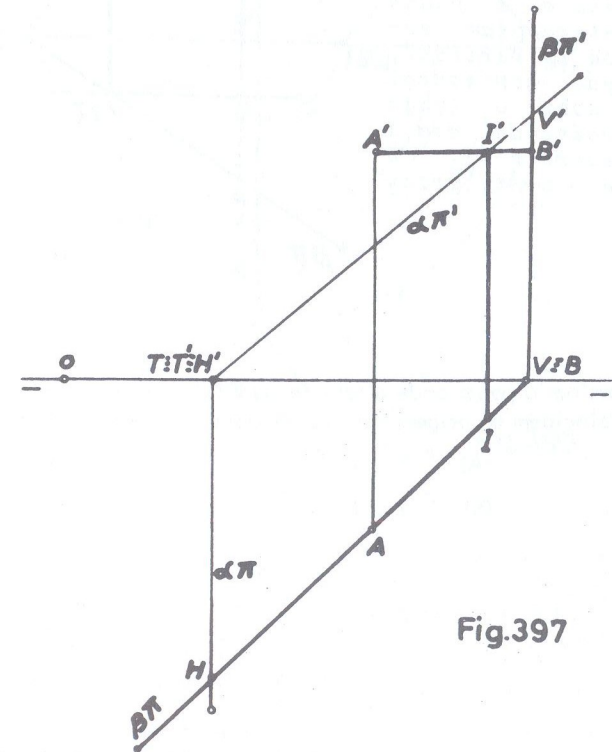



Fig.397

133 • Determinar o traço de uma reta (A)(B) horizontal, sobre o plano frontal (α) que contém um ponto (C).

(A) [0 ; 3 ; 2]

(B) [3 ; 1 ; ?]

(C) [4 ; 2 ; 0]

Solução: (fig. 398)

Solução imediata. Se o plano frontal contém um ponto de afastamento 2, é porque seu traço horizontal tem também o mesmo afastamento.
O plano vertical (β) projetante da reta e o plano dado se interceptam segundo a reta (r) vertical, cuja projeção horizontal r se situa sobre o traço απ, e, coincide com I que dá I' sobre A'B'. O ponto (I) é o ponto procurado.

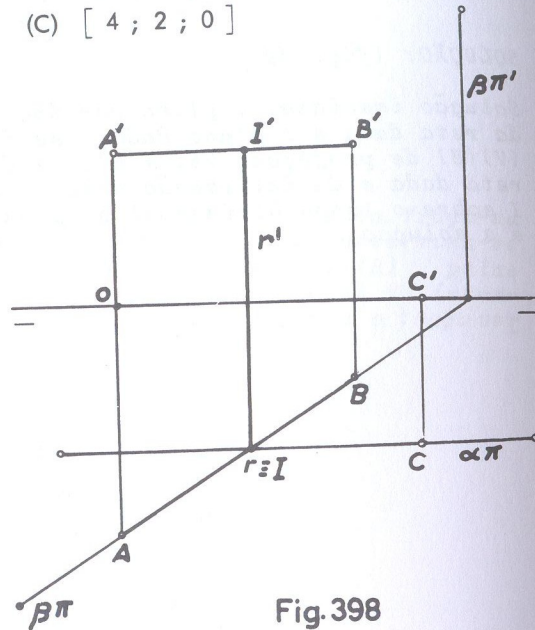



Fig. 398

134 • Determinar o ponto onde a reta de perfil (A)(B) fura o plano (α) cujos traços coincidem na origem das coordenadas e é perpendicular ao (β_I).

(A) [3 ; 3 ; 2] $\widehat{\alpha\pi'} = 50°$

(B) [? ; 1 ; 0]

Solução: (fig. 399)

O ponto (O) onde os traços do plano coincidem, que é a origem das coordenadas, pode ser tomado em qualquer lugar da linha de terra. Se o plano é perpendicular ao (β_I) seus traços são simétricos em relação a linha de terra e portanto o ângulo de απ com ππ' é o mesmo (50º).
Rebatendo-se o plano de perfil que contém a reta dada e também a interseção entre eles, encontramos a reta (A_1)(B_1) e a interseção em $V'H_1$ e (I_1) é o ponto comum na interseção de ambas. O ponto (I) de projeções I e I' é a solução.

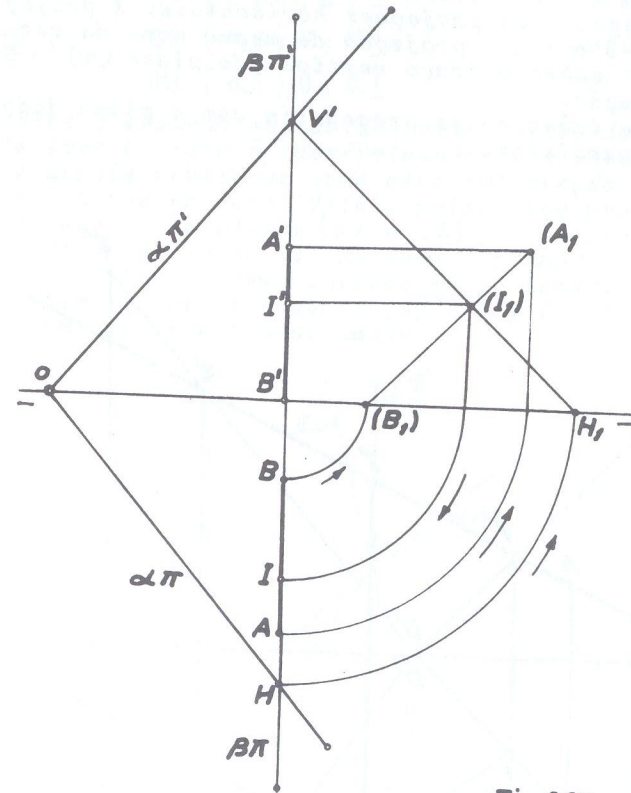



Fig. 399

135 • Achar o ponto onde a reta (A)(B) fura o plano dado por duas retas concorrentes (C)(D) e (D)(E) do qual não se pode achar os traços.

(A) [2 ; 4 ; 1]

(B) [10 ; 0 ; 5]

(C) [1 ; 3 ; 3]

(D) [4 ; 0 ; 0]

(E) [8 ; 6 ; 5]

Solução: (fig. 400)

O plano de topo (α) projetante da reta dada intercepta as projeções verticais das retas concorrentes, nos pontos 1' e 2' sobre C'D' e D'E' respectivamente, pontos esses que dão 1 e 2 sobre as respectivas projeções horizontais. A projeção horizontal de 1-2 corta a projeção de mesmo nome da reta dada em I que dá I' sobre o traço vertical do plano (α) . Esse ponto (I) é a solução.

OBS: De modo idêntico se procederia com o plano dado por duas retas paralelas.

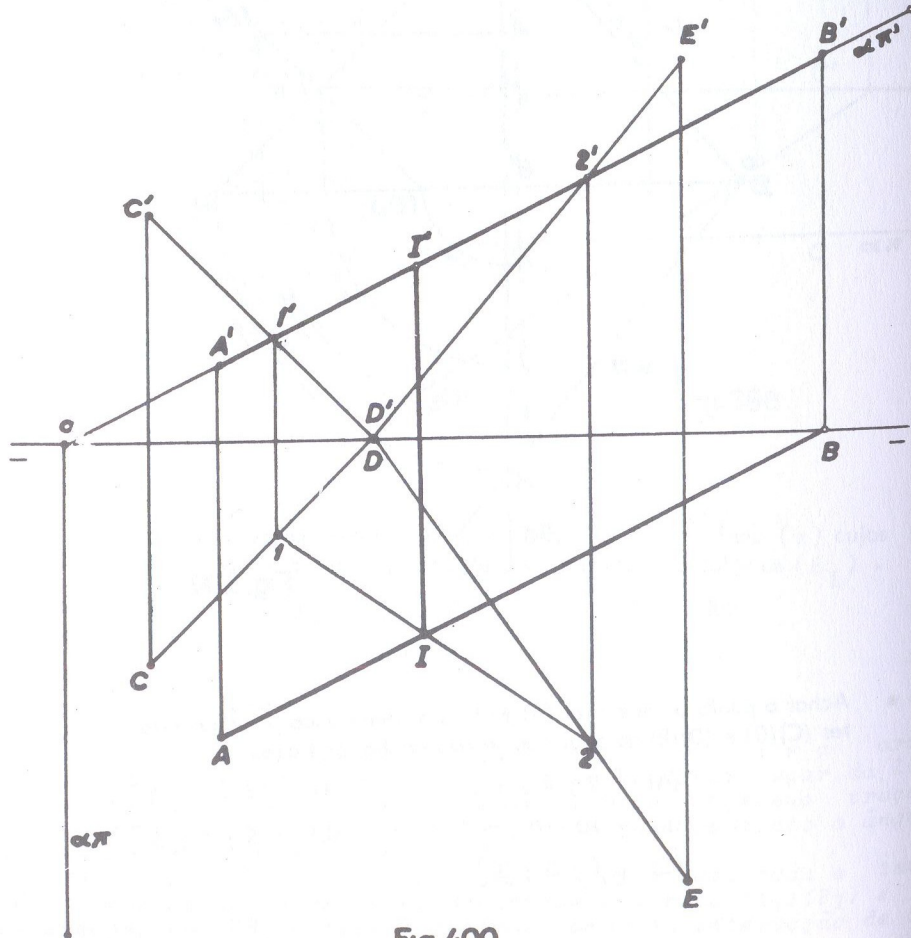



Fig. 400

- referentes a C)

136 • Determinar o ponto comum aos planos (α) , (β) e (γ) que contém respectivamente os pontos (T), (J) e (K), sabendo-se que (γ) é perpendicular ao (β_P) .

Solução: (fig. 401)	(T) [0 ; 0 ; 0]	$\widehat{\alpha\pi}' = 40°$	$\widehat{\beta\pi}' = 105°$
	(J) [4,5 ; 0 ; 0]	$\widehat{\alpha\pi} = -60°$	$\widehat{\beta\pi} = -140°$
	(K) [6,5 ; 0 ; 0]	$\widehat{\gamma\pi}' = 35°$	

Empregando-se o segundo método descrito quando do estudo teórico deste item C, isto é, determinando-se a interseção de dois deles e depois verificar onde essa interseção fura o terceiro plano, temos na reta (V)(H), pelas suas projeções VH , V'H', a interseção dos planos (α) e (β) . A seguir, para a determinação do ponto onde (V)(H) fura o plano (γ), utilizou-se como plano projetante dessa interseção já achada, o plano vertical (δ) e em (I) pelas suas projeções I, I' achamos o ponto pedido, comum aos três planos dados.

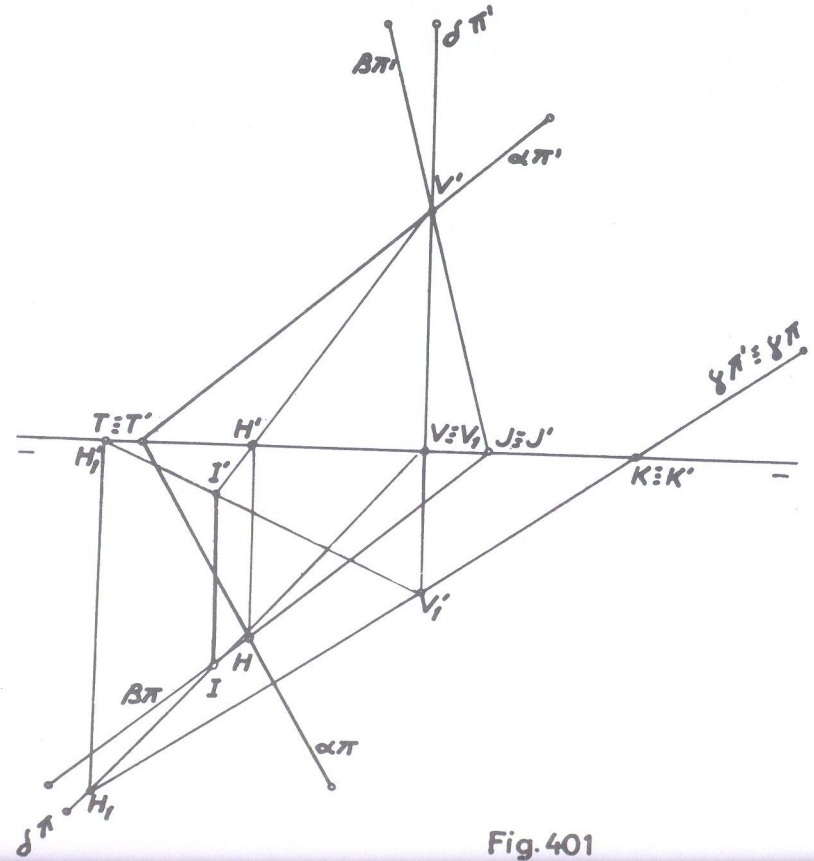



Fig. 401

137 • Determinar a interseção dos três planos: horizontal (α) , vertical (β) e de perfil (γ) .
Obs: Exercício sem coordenadas.

SOLUÇÃO: (fig. 402)

A interseção dos dois primeiros planos, (α) e (β) , é a horizontal (r) de projeções r e r' cujo traço vertical V' está sobre o traço vertical απ' no ponto de concorrência com o traço βπ' e projeção horizontal coincidente com o traço βπ.
A interseção do primeiro plano (α) , horizontal, com o terceiro (γ), de perfil, é a reta de topo (s), cuja projeção puntual s' se situa no ponto de concorrência dos traços απ' e γπ' e projeção horizontal s, coincide com o traço γπ .
Essas duas interseções, (r) e (s), se interceptam em I, que é também o ponto de concorrência dos traços βπ e γπ e que fornece I' sobre r'.
O ponto (I) é, pois, a solução.
OBS: Nesse exercício utilizou-se o primeiro método descrito no estudo teórico.

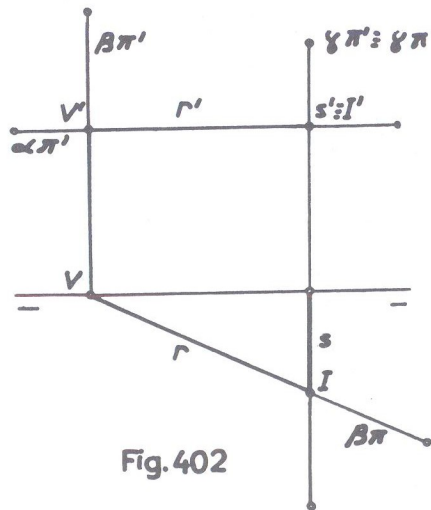



Fig.402

138 • Determinar o ponto comum aos seguintes planos: (α) que contém (T); (β), de topo que contém (A) e (J) e (γ) paralelo à linha de terra.

(T)	[0 ; 0 ; 0]	$\widehat{\alpha\pi'}$ = 40º
(A)	[2 ; 0 ; 4,5]	$\widehat{\alpha\pi}$ = -45º
(J)	[6 ; 0 ; 0]	γπ' = 3,5
		γπ = 2,5

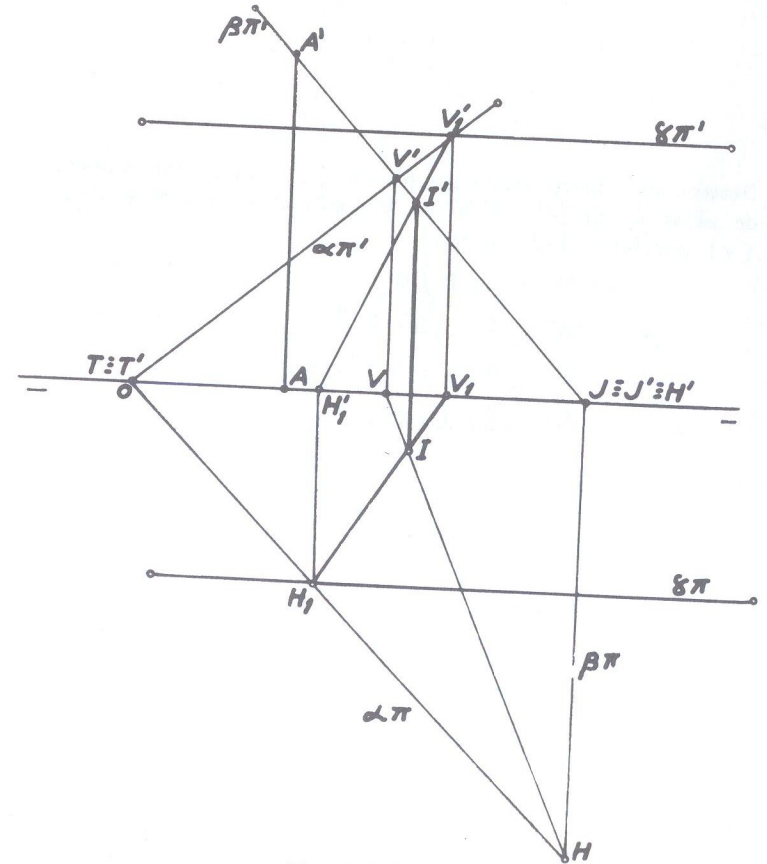



Fig.403

SOLUÇÃO: (fig. 403)

Do plano (β), de topo, não foi dada a inclinação de seu traço vertical; mas, como contém o ponto (A), logicamente seu traço vertical passa pela projeção A' do referido ponto. Utilizando-se o primeiro processo já descrito, determinamos as duas interseções, primeiro, de (α) com (β) e depois, de (α) com (γ). O ponto (I) comum às duas interseções é a solução.

139 • Determinar o ponto comum aos planos (α) que contém o ponto (T), (β) dado pelos pontos (A), (B) e (C) do qual não se pode determinar os traços e (γ) paralelo à linha de terra.

(T)	[0 ; 0 ; 0]	$\hat{\alpha\pi}'$ = 35º
(A)	[4 ; 1,5 ; 2]	$\hat{\alpha\pi}$ = -45º
(B)	[6 ; 0 ; 1]	γπ' = 4,5
(C)	[7 ; 1 ; 4]	γπ = 3

SOLUÇÃO: (fig. 404)

Determina-se a interseção dos dois planos dados pelos traços e obtém-se a reta (V)(H) pelas suas projeções VH, V'H'. Utilizando-se como plano projetante dessa interseção o de topo (δ) para se determinar onde ela fura o plano dado pelos pontos, encontra-se o ponto (I) dado pelas projeções I, I' que é a solução.

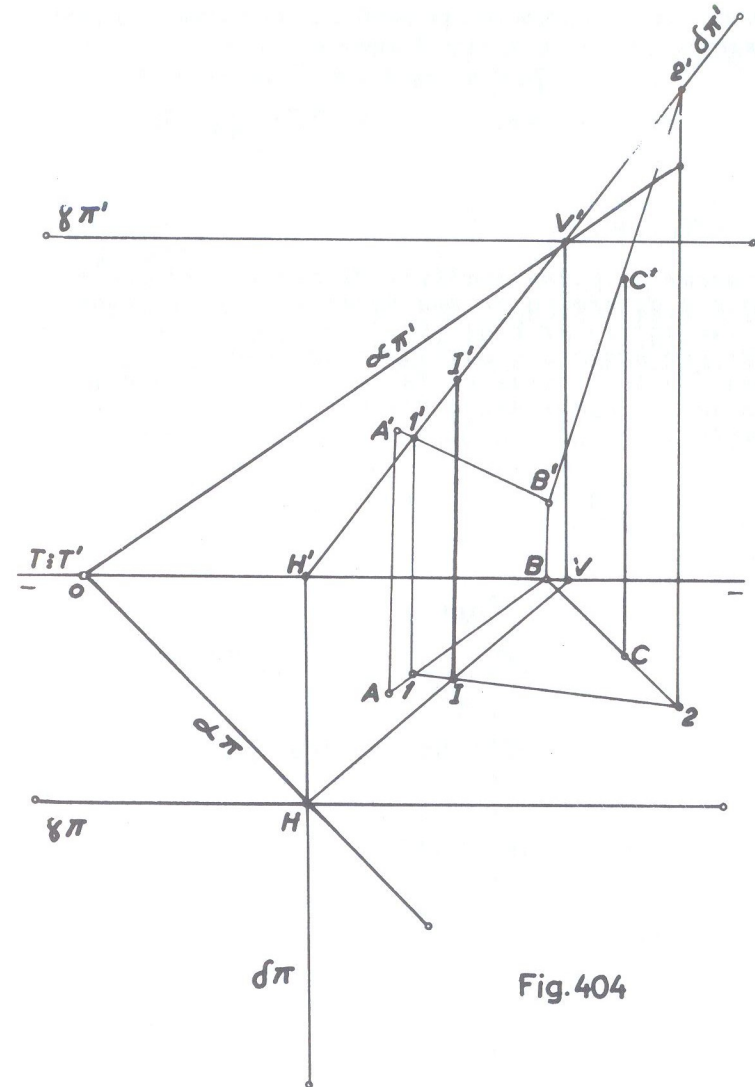



Fig.404

- referentes a D)

NOTA: Os casos de solução imediata já foram tratados no estudo teórico (fig. 340 a 361) e não serão portanto objeto da série de exercícios a seguir.

140 • De um ponto (A) traçar uma perpendicular a um plano (α) paralelo a linha de terra.

(A) [0 ; 2 ; 3] $\alpha\pi' = 4$

$\alpha\pi = 3$

SOLUÇÃO: (fig. 405)

Faz-se passar um plano auxiliar de perfil (β) que contenha o ponto dado e determina-se sua interseção com o plano também dado, o que ocorre em $V'H_1$. De (A_1) traça-se uma perpendicular - A_1M_1 por exemplo - àquela interseção $V'H_1$, e, desfazendo-se o rebatimento, tem-se em (A)(M) a reta solução, representada por suas projeções AM, A'M'. O ponto (M_1) foi tomado arbitrariamente.

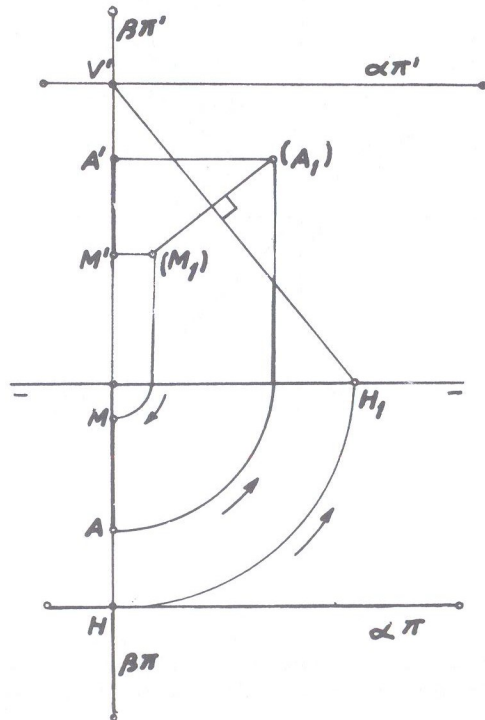



Fig. 405

141 • De um ponto (A) traçar uma perpendicular (A)(B) ao plano (α) paralelo ao (β_I), sabendo-se que (B) é o traço de (A)(B) no (β_I).

(A) [4 ; -2,5 ; 4] $\alpha\pi = 1,5$

SOLUÇÃO: (fig. 406)

*O plano dado possui o afastamento do traço horizontal igual a 1,5 cm. Não é dado o traço vertical $\alpha\pi'$ mas, sendo o plano (α) paralelo ao (β_I) os seus traços são coincidentes e para-
lelos a $\pi\pi'$.
Rebatendo-se o plano (γ) de perfil que contém o ponto, obtém-
se em (r_1) sua interseção com o plano dado e em (r_2) que for-
ma o ângulo de 45º com $\pi\pi'$, sua interseção com o (β_I). A
perpendicular (A_1)(B_1) a (r_1), intercepta (r_2) em (B_1) e des-
fazendo-se o rebatimento, têm-se em AB, A'B' as projeções da
reta pedida.*

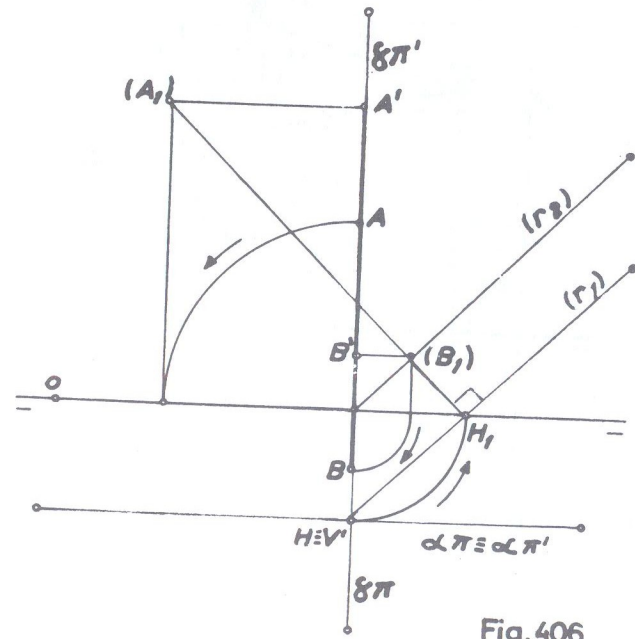



Fig. 406

142 • De um ponto (M), traçar uma perpendicular ao plano definido pelos pontos (A), (B) e (C) do qual não se pode determinar os traços.

(A) [-3 ; 4 ; 3] (C) [2,5 ; 3,5 ; 2]

(B) [0,5 ; 2 ; 4] (M) [1 ; 1 ; 1]

SOLUÇÃO: (fig. 407)

Utilizando-se as retas principais do plano, temos em AD, A'D' uma horizontal e em CE, C'E' uma frontal.
É suficiente traçar pelo ponto dado uma reta (r) cuja projeção vertical r' seja perpendicular a projeção de mesmo nome da frontal e projeção horizontal (r), perpendicular à projeção de mesmo nome da horizontal.

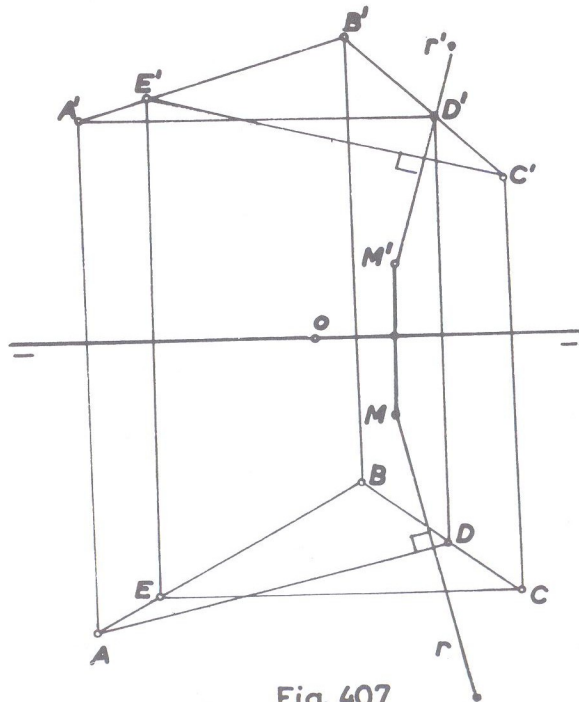



Fig. 407

143 • Traçar por um ponto (A) uma reta (A)(B) perpendicular ao plano definido pelo ponto (M) e à linha de terra, devendo o ponto (B) possuir cota e afastamento na razão 2/3.

(A) [0 ; 1 ; 3,5] (M) [0 ; 1 ; 1]

SOLUÇÃO: (fig. 408)

O plano de perfil auxiliar (γ) que contém os pontos (A) e (M) dados, intercepta o plano definido pelo ponto e pela linha de terra, segundo a reta (r_1) que une o ponto (M_1) a origem das coordenadas.
Devendo o ponto (B) possuir cota e afastamento na razão dada de 2/3, toma-se o ponto (C) que mantenha essa razão, isto é, um ponto com cota 2 e, afastamento 3 e tem-se na reta (r_2) a interseção do plano de perfil com o definido pela linha de terra e o ponto (o). Assim, (r_2) é o lugar geométrico de todos os pontos que possuem cota e afastamento na razão 2/3. De (A_1) baixa-se então (A_1)(B_1) perpendicular a reta (r_1) e o ponto(B_1) sobre (r_2) fornece, desfeito o rebatimento, as projeções B e B'
A reta de perfil de projeções AB, A'B' é a solução.

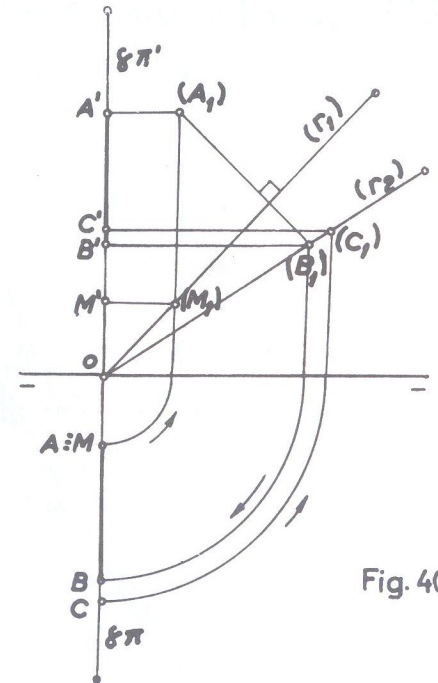



Fig. 408

144 • Determinar as projeções da menor distância do ponto (A) ao plano (α) que contém o ponto (T) e é perpendicular ao (β_P).

(A) [3 ; 3 ; 2] $\widehat{\alpha\pi'} = 60°$

(T) [0 ; 0 ; 0]

SOLUÇÃO: (fig. 409)

A menor distância de um ponto ao plano é a perpendicular do ponto ao seu pé no plano, isto é, do ponto do espaço ao ponto onde essa perpendicular fura o plano.
Então, traça-se do ponto dado (A) a perpendicular (r) ao plano (α) ; procura-se o ponto onde essa perpendicular fura o plano, o que ocorre em (B) cujas projeções B e B' situam-se sobre VH, V'H' respectivamente, pois (H)(V) é a interseção do plano dado com o plano auxiliar (β), vertical, projetante dessa interseção que é perpendicular ao plano (α). A reta (A)(B) pelas projeções AB, A'B' resolve o problema.

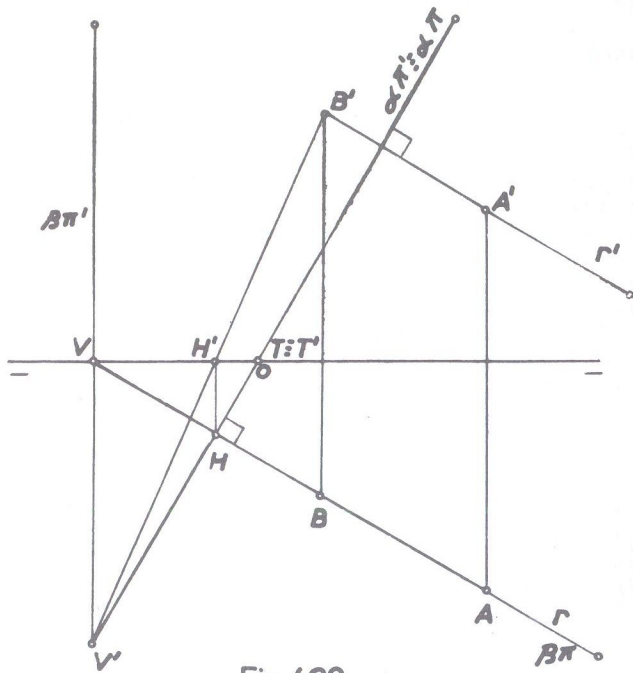



Fig.409

145 • Por um ponto dado (A), do (β_I), traçar um plano perpendicular a uma reta de perfil (M)(N).

(A) [3 ; ? ; 1]
(M) [0 ; 2,5 ; 3]
(N) [? ; 1 ; 1,5]

SOLUÇÃO: (fig. 410)

Rebate-se o plano de perfil projetante da reta dada (M)(N) e também o que contém o ponto (A).
Por (A_1) traça-se, perpendicularmente a $(M_1)(N_1)$, a reta $V'H_1$ situando-se V' na interseção com o plano de perfil que contém (M)(N) e H_1 sobre a linha de terra. Essa reta $V'H_1$ é a interseção do plano de perfil auxiliar que contém (M)(N) com o plano (α) paralelo à linha de terra e pelos traços V' e H passam os traços απ' e απ do plano solução.

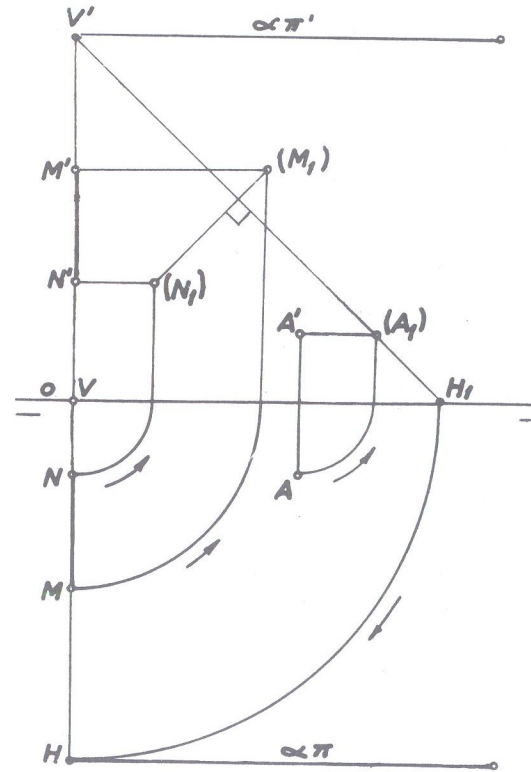



Fig.410

146 • Por um ponto dado (M), fazer passar um plano perpendicular ao definido pelos pontos (A), (B) e (C) do qual não se pode determinar os traços.

(M) [4 ; 4 ; 2] (B) [4,5 ; 0 ; 3,5]
(A) [2 ; 3 ; 1,5] (C) [7 ; 3 ; 0]

SOLUÇÃO: (fig. 411)

Traça-se uma horizontal (A)(D) e uma frontal (E)(C) do plano, tal como foi feito no exercício 142 (fig. 407). A seguir, por (M) traça-se uma reta (M)(V) cuja projeção horizontal MV seja

perpendicular à projeção horizontal AD e projeção vertical M'V' perpendicular à projeção vertical E'C' da frontal. Pelos traços V' e H dessa reta (M)(V) passarão os traços de qualquer plano solução, como por exemplo, o plano (α).

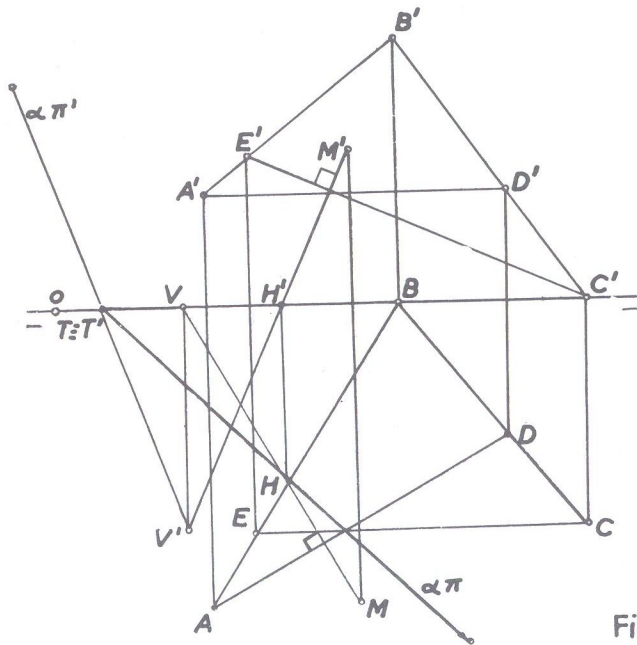



Fig. 411

147 • Mesmo exercício anterior com os dados abaixo, devendo o plano solução conter o ponto (T).

(M) [2 ; 1 ; 1,5] (C) [10 ; 3 ; -2]
(A) [4,5 ; 1 ; 1,5] (T) [0 ; 0 ; 0]
(B) [7 ; -3 ; 1]

SOLUÇÃO: (fig. 412)

Procede-se exatamente como no exercício anterior. Traça-se a horizontal (A)(D) e a frontal (E)(C) do plano. A seguir, por (M), traça-se uma reta (M)(V) cuja projeção horizontal MV seja perpendicular à projeção horizontal AD e projeção vertical M'V' perpendicular à projeção vertical E'C' da frontal. Pelos traços V' e H dessa reta (M)(V), passarão os traços do plano (α) que não é indeterminado como no exercício anterior, porque há a exigência do plano conter o ponto (T) dado. Então, unindo-se T'V' tem-se o traço απ' e do mesmo modo, unindo-se TH tem-se o traço απ. O plano (α) é, pois, a solução.

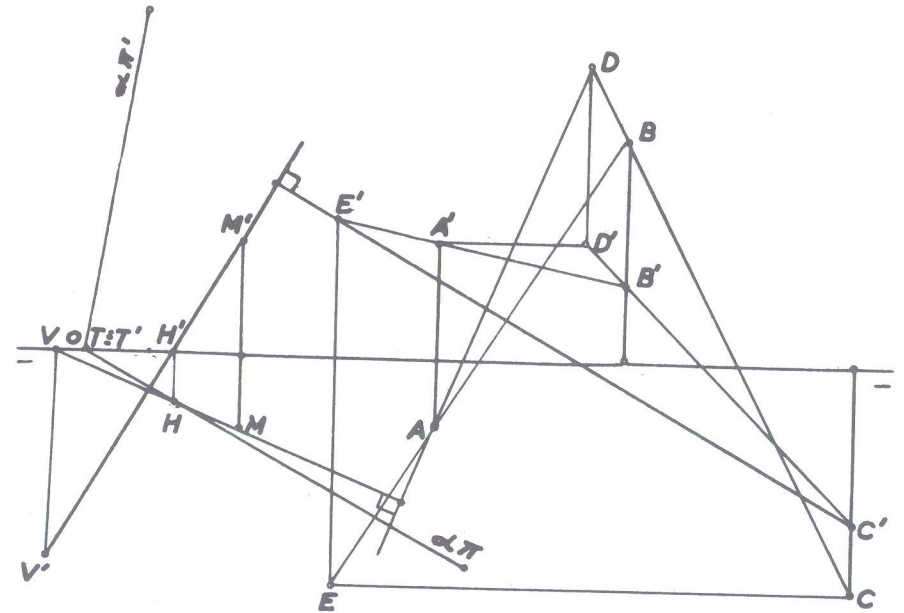



Fig. 412

148 • Por um ponto dado (A), traçar um plano perpendicular ao (β_I) que contenha o ponto (T).

(A) [3 ; 1,5 ; 2,5] (T) [1 ; 0 ; 0]

SOLUÇÃO: (fig. 413)

Pelo ponto dado, faz-se passar o plano de perfil auxiliar que o contém e determina-se sua interseção com o (β_I)*, que é a reta* (r_1) *inclinada de 45º com a linha de terra. Por* (A_1) *traça-se* $V'H_1$ *perpendicularmente ao* (β_I)*, isto é, perpendicular à reta* (r_1) *e desfazendo-se o rebatimento, tem-se H, traço horizontal da interseção. Unindo-se T'V' e TH, tem-se o plano* (α) *que é perpendicular ao* (β_I) *e, portanto, de traços simétricos.*

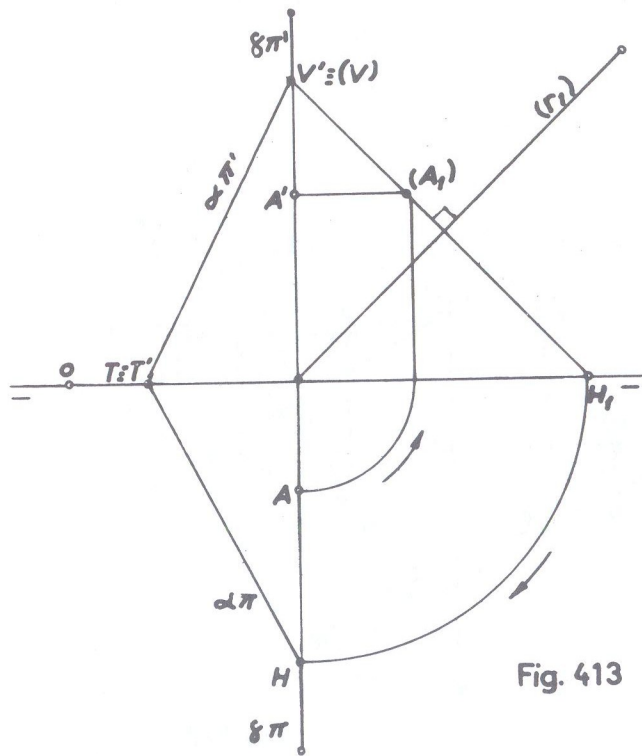



Fig. 413

149 • Por um ponto dado (A), traçar um plano perpendicular ao (β_P) que contenha o ponto (J).

(A) [4 ; -3 ; -1] (J) [3 ; 0 ; 0]

SOLUÇÃO: (fig. 414)

O ponto dado está no 3º diedro e, procedendo-se tal como no exercício anterior, tem-se em (r_1) *a reta interseção do plano de perfil que contém o ponto (A) com o* (β_P)*. Por* (A_1) *que se obtém após o rebatimento do plano de perfil, traça-se* (A_1)*V' perpendicular a* (r_1)*. Desfeito o rebatimento, o traço H coincide com V' e esse ponto V' ≡H une-se ao ponto (J) dado e tem-se o plano* (α) *que é a solução.*

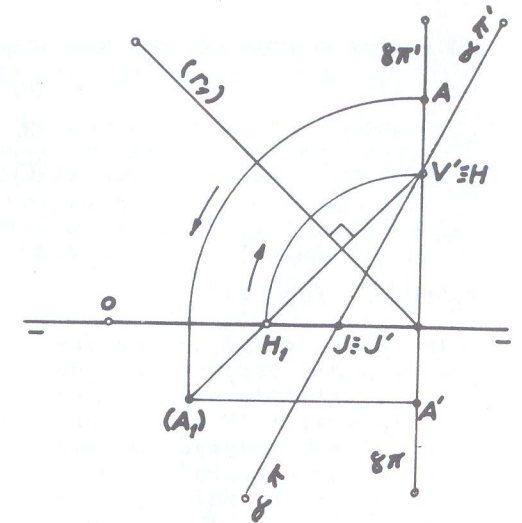



Fig. 414

150 • Por um ponto (A), traçar uma perpendicular a uma reta (B)(C) de perfil.

(A) [0 ; 2 ; 3]

(B) [2 ; 1 ; -1]

(C) [? ; 3 ; 1,5]

SOLUÇÃO: (fig. 415)

Faz-se passar pela reta (B)(C), o plano de perfil que a contem, o qual rebatido fornece (B_1)(C_1)*. Do ponto dado (A), traça-se a perpendicular ao plano de perfil que é uma paralela à linha de terra (A)(F), de projeções AF, A'F', situando-se (F) no mesmo plano de perfil que contém a reta (B)(C). Essa reta (A)(F) será ortogonal à reta de perfil dada. De* (F_1)*, traça-se* (F_1)(M_1) *perpendicular a* (B_1)(C_1) *e desfeito o rebatimento,* (M_1) *fornece as projeções M e M'. A reta (A)(M), pelas projeções AM, A'M', é a reta solução.*

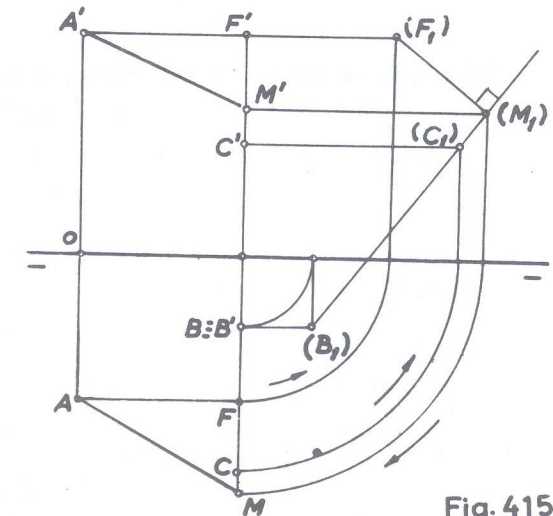



Fig. 415

151 • Por um ponto dado (A), traçar um plano perpendicular a reta (B)(C) dada.

(A) [0 ; 1,5 ; 1]
(B) [-2 ; 1 ; 2]
(C) [-1 ; 2 ; 2,5]

SOLUÇÃO: (fig. 416)

Pelo ponto dado, de projeções A e A', traça-se uma horizontal (A)(V), cuja projeção horizontal AV seja perpendicular à projeção de mesmo nome da reta. Pelo traço V' dessa horizontal, faz-se passar o traço απ', perpendicular à projeção vertical B'C' da reta, sendo o traço απ paralelo a AV. O plano (α) é a solução.

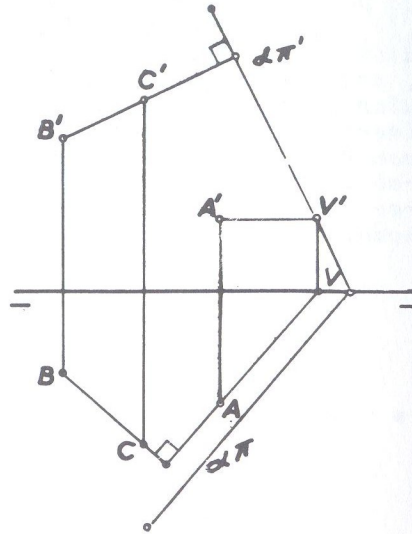



Fig. 416

152 • Por um ponto dado (A), traçar uma reta perpendicular à reta (B)(C).

(A) [5 ; 2,5 ; 3]
(B) [2 ; 3,5 ; 3]
(C) [4 ; 2 ; 1,5]

SOLUÇÃO: (fig. 417)

Procede-se tal como está descrito na solução geométrica (fig. 358), ou seja, traçar pelo ponto um plano perpendicular à reta e determinar o ponto em que a reta dada fura esse plano , ponto esse que, unido ao ponto dado, fornece à reta pedida. Então, para se traçar por um ponto dado um plano perpendicular a uma reta dada (ver exercício anterior) traça-se a horizontal (A)(V) onde a projeção horizontal AV é perpendicular à

projeção BC da reta dada, e, pelo traço vertical V', perpendicularmente à projeção B'C', faz-se passar απ' sendo απ paralelo a AV.
Determina-se, a seguir, o ponto em que a reta (B)(C) fura o plano (α), utilizando-se como plano projetante da reta dada, o vertical (β). A interseção desses dois planos é $(V_1)(H)$ cuja projeção vertical $V_1'H'$ intercepta a projeção vertical B'C' em I' que fornece I sobre BC. Unindo-se o ponto (I) ao ponto dado (A), tem-se (A)(I) a reta pedida, de projeções AI, A'I'.

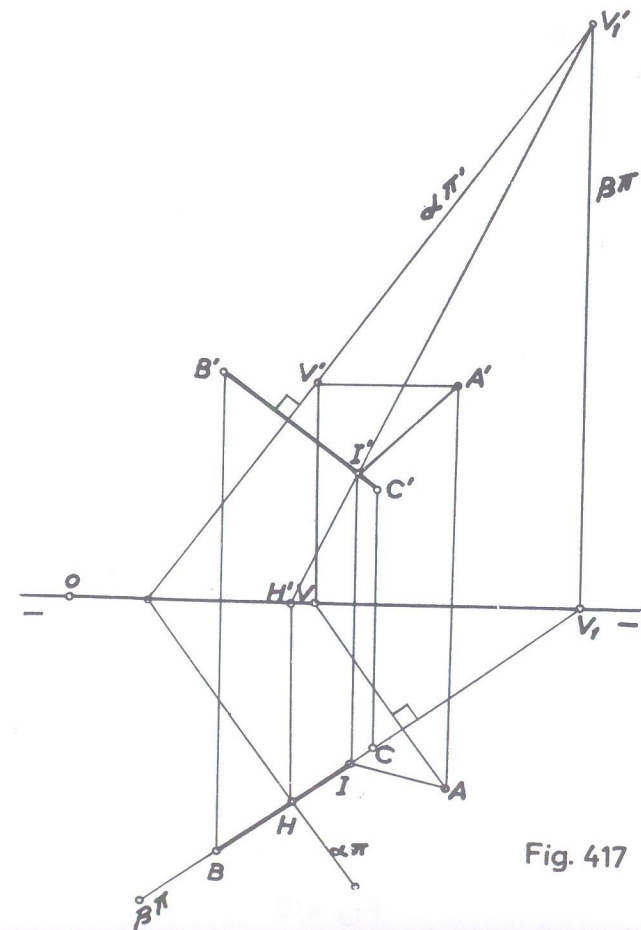



Fig. 417

153 • Mesmo exercício anterior com os pontos na situação abaixo, representando apenas o segmento no 1º diedro da reta pedida.

(A) [1 ; 1 ; 3,5]

(B) [4 ; 4 ; -4]

(C) [7 ; -3 ; -1]

SOLUÇÃO: (fig. 418)

Procedendo-se exatamente como no exercício anterior, tem-se: plano (α) de traço vertical $\alpha\pi'$ passando pelo traço V' da horizontal (A)(V) e perpendicular à projeção $B'C'$ da reta; traço horizontal $\alpha\pi$ paralelo a AV.
Plano projetante da reta dada, o de topo (β) e interseção de (α) e (β), a reta $(V_1)(H)$, de projeções V_1H, $V_1'H'$.
Ponto onde a reta (B)(C) fura o plano (α) é (I), ou seja, onde V_1H intercepta BC é a projeção I que dá I' sobre $B'C'$. A reta (A)(I) é a reta pedida que tem em AH_1, $A'H_1'$, as projeções do segmento no 1º diedro.

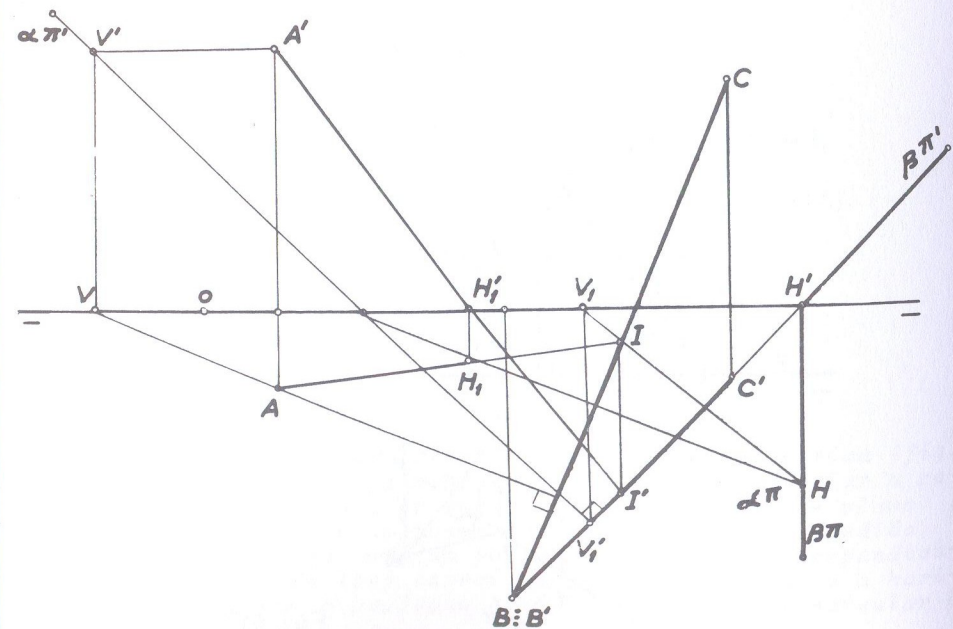



Fig. 418

154 • Por uma reta dada (A)(B) traçar um plano perpendicular ao plano (α) que contém o ponto (T).

(A) [2 ; 1 ; 0] $\widehat{\alpha\pi'} = 50º$

(B) [5 ; 3 ; 3] $\widehat{\alpha\pi} = -40º$

(T) [3,5 ; 0 ; 0]

SOLUÇÃO: (fig. 419)

Por um ponto qualquer da reta dada, (B), por exemplo, traça-se uma reta (r) perpendicular ao plano dado. Pelos traços dessas duas retas passam os traços do plano pedido (β).

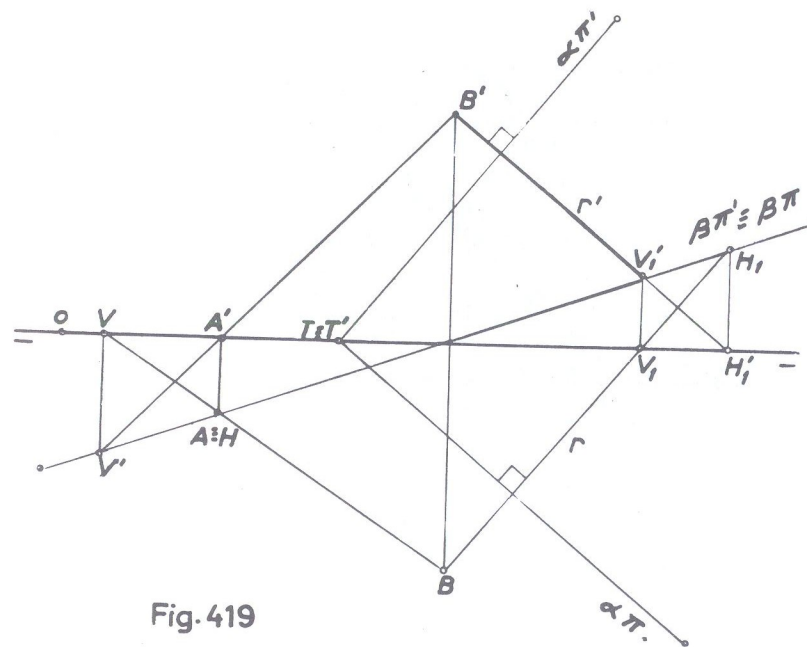



Fig. 419

155 • Por um ponto dado (A), traçar um plano perpendicular a dois planos (α), que contém o ponto (T) e (β) perpendicular ao (β_I) e que contém (J).

(A) [1,5 ; 1 ; 2] $\widehat{\alpha\pi'} = 120°$

(T) [2 ; 0 ; 0] $\widehat{\alpha\pi} = -35°$

(J) [5 ; 0 ; 0] $\widehat{\beta\pi} = -140°$

SOLUÇÃO: (fig. 420)

Pelo ponto dado, traçam-se duas retas perpendiculares respectivamente aos planos dados. No caso, (A)(H) perpendicular ao plano (α), onde H e V' são os seus traços; $(A)(H_1)$ perpendicular ao plano (β) onde H_1 e V_1' são os seus traços. Os traços do plano (γ) solução passarão pelos traços respectivos dessas duas perpendiculares.

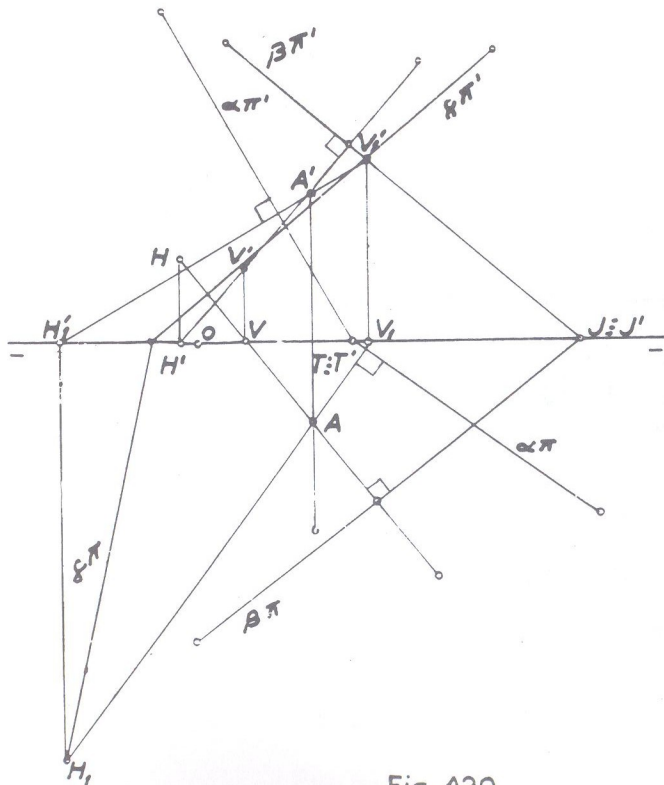



Fig. 420

CAPÍTULO V

- **Exercícios diversos (resolvidos)**
- **Exercícios propostos**

Este capítulo é só de exercícios. Na primeira parte (item A), exercícios diversos, resolvidos, abrangendo todo o assunto estudado neste Volume I. Na segunda parte (item B), exercícios propostos, para serem resolvidos.

• Exercícios diversos (resolvidos)

156 • Dados um plano (α) que contém o ponto (T) e é perpendicular ao (β_P) e uma reta (A)(B), determinar:

a) um ponto do plano que tenha afastamento positivo e cota negativa;

b) um ponto da reta cuja relação entre cota e afastamento esteja na razão -3;

c) a interseção da reta com o plano.

(T) [4 ; 0 ; 0]

(A) [7 ; 2 ; 1] $\widehat{\alpha\pi'} = 30°$

(B) [7 ; 3 ; -4]

SOLUÇÃO: (fig. 421)

Traçado o plano (α), como é perpendicular ao (β_P), seus traços estão em linha reta. O primeiro item é de solução imediata: uma frontal arbitrária do plano, (C)(D) por exemplo, tem no ponto (D) do (β_P) a resposta, pois seu afastamento é positivo e sua cota negativa.
Para o segundo item, ver exercício 72 (fig. 292). Rebatido o plano de perfil (β) que contém a reta, tem-se $(A_1)(B_1)$. Marcado o ponto (F) na relação dada, isto é, cota positiva uma unidade e afastamento negativo três unidades, e daí, as projeções F e F' e a reta $(J)(F_1)$ é o lugar geométrico de todos os pontos na razão dada; essa reta $(J)(F_1)$ intercepta $(A_1)(B_1)$ no ponto (M_1) cujas projeções M e M' solucionam o segundo item.
Quanto ao terceiro item, semelhante ao exercício 134 (fig. 399).

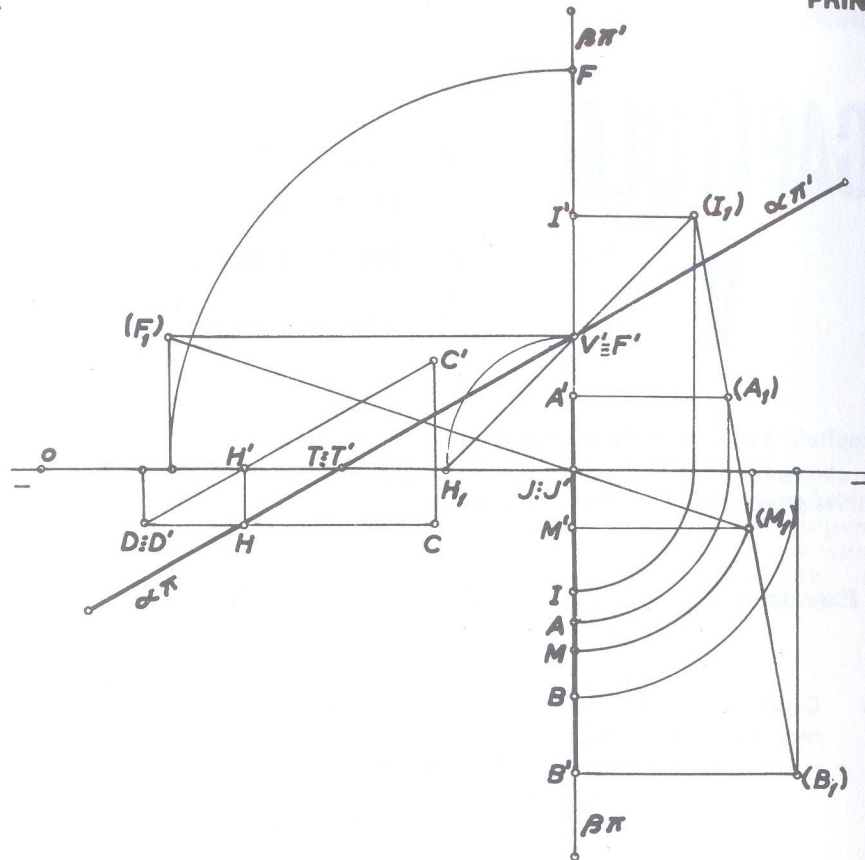



Fig. 421

157 • Achar os traços do plano mediador do segmento (A)(B) e determinar a interseção desse plano com o (β_I)

(A) [2 ; 2 ; 3]

(B) [5 ; 3 ; 1]

SOLUÇÃO: (fig. 423)

Explicação necessária: Quando, dada uma reta pelas suas projeções, se desejar um ponto da reta eqüidistante de seus extremos, basta tomar um ponto que seja eqüidistante dos extremos das projeções.

Na fig. 422, (C) varia para (A)(B) na mesma razão que C varia para AB. Diz-se então que as razões das projeções de duas partes de uma reta é igual à razão das partes dessa reta. Assim, na fig. 422, teremos:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{(A)(C)}{(C)(B)}$$

e por essa razão, quando (C) for meio de (A)(B), a projeção C será meio de AB.

Voltando então ao exercício proposto, pelo ponto médio (M) de (A)(B), faz-se passar o plano (α) perpendicular a (A)(B). (Ver fig. 349), e que é o plano mediador. (Fig. 423)
Achado o plano (α), para determinar sua interseção com o(β_I) procede-se como no exercício 107 (fig. 371).
A reta (T)(I) pelas projeções TI, T'I' é a solução.

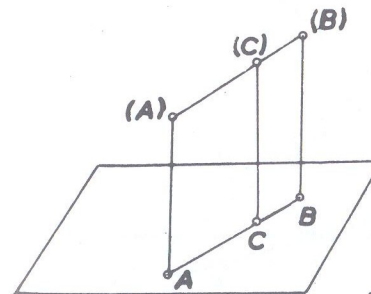



Fig. 422

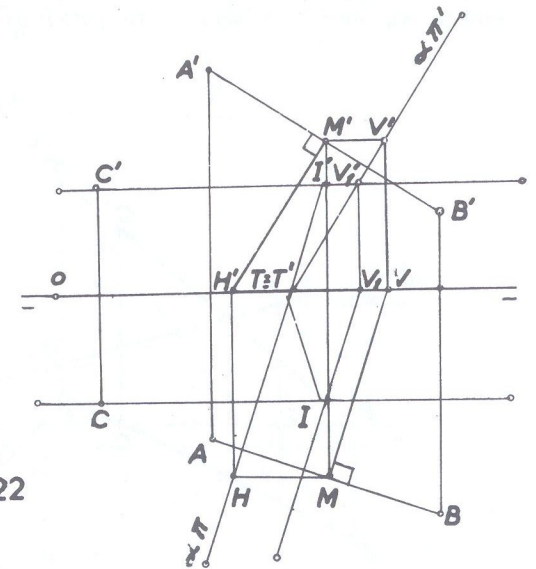



Fig. 423

158 • Por um ponto dado (A), traçar uma reta que encontre duas outras retas (B)(C) e (D)(E) não coplanares.

(A) [4,5 ; 1;5 ; 2]

(B) [-1 ; 1,5 ; 0]

(C) [2 ; 0 ; 2,5]

(D) [0 ; 3 ; 1,5]

(E) [5,5 ; 4,5 ; 0]

SOLUÇÃO: (fig. 424)

Pelo ponto e por uma das retas, faz-se passar um plano e determina-se o traço da outra reta sobre o plano determinado, o qual, unido ao ponto dado, resulta na reta pedida.
Então, traçou-se pelo ponto dado (A), a reta (A)(F) paralela à reta (B)(C), onde o ponto (F) foi tomado arbitrariamente.
Ficamos assim com um plano definido por duas retas paralelas, do qual, entretanto, não é necessário determinar os traços.
Para se determinar o ponto onde a reta (D)(E) fura o plano das paralelas, usou-se o projetante de topo (β), cujo traço vertical βπ' interceptou as projeções verticais das retas paralelas, em 1' e 2' que fornecem 1 e 2 sobre as projeções horizontais respectivas, e onde 1-2 e DE se encontram em I que dá I' sobre as projeções verticais respectivas que coincidem com o traço βπ'. Esse ponto (I) unido ao ponto dado (A), resulta na reta solução, de projeções IA, I'A'.

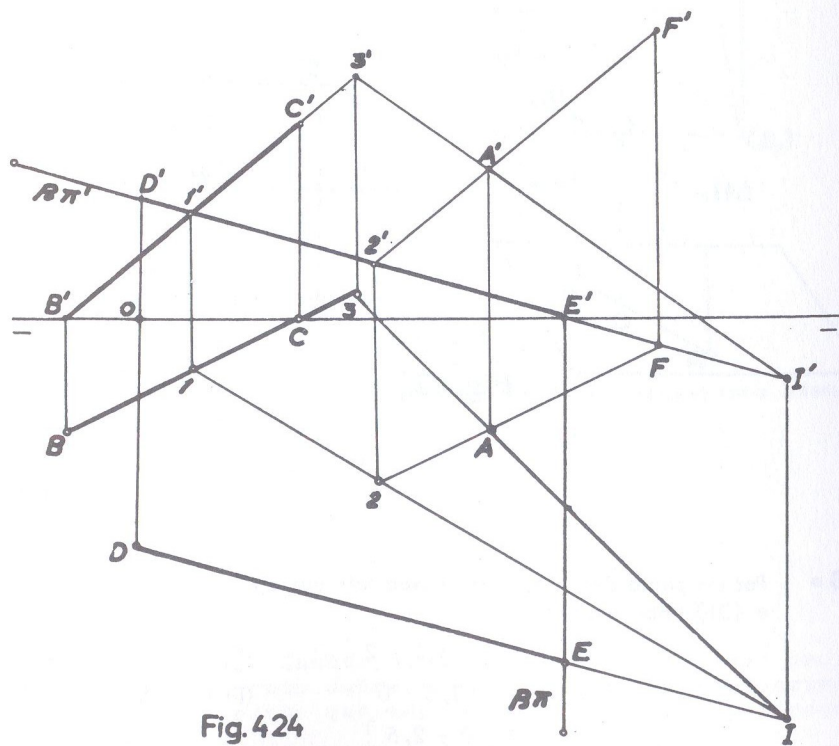



Fig. 424

159 • Traçar uma reta que se apoie em duas retas dadas, (A)(B) e (C)(D) não coplanares, e que seja paralela à uma terceira reta (E)(F).

(A)	[0 ; 1 ; 0]	(D)	[8 ; 2 ; 0]
(B)	[3,5 ; 3 ; 2,5]	(E)	[8,5 ; 2 ; 2]
(C)	[5 ; 5 ; 4]	(F)	[10 ; 1,5 ; 2]

SOLUÇÃO: (fig. 425)

A reta pedida é a interseção de dois planos conduzidos respectivamente pelas retas dadas, paralelamente à terceira reta.
Por um ponto qualquer (G) da reta (A)(B), traçou-se a reta (r) paralela à terceira reta (E)(F), determinando assim um plano definido por essas retas. Para a determinação do ponto (I) em que (C) (D) furou o plano. usou-se como plano projetante de (C)(D) o de topo (β). Do ponto (I), traçou-se a reta (s) paralela à (E)(F) e que é a solução.

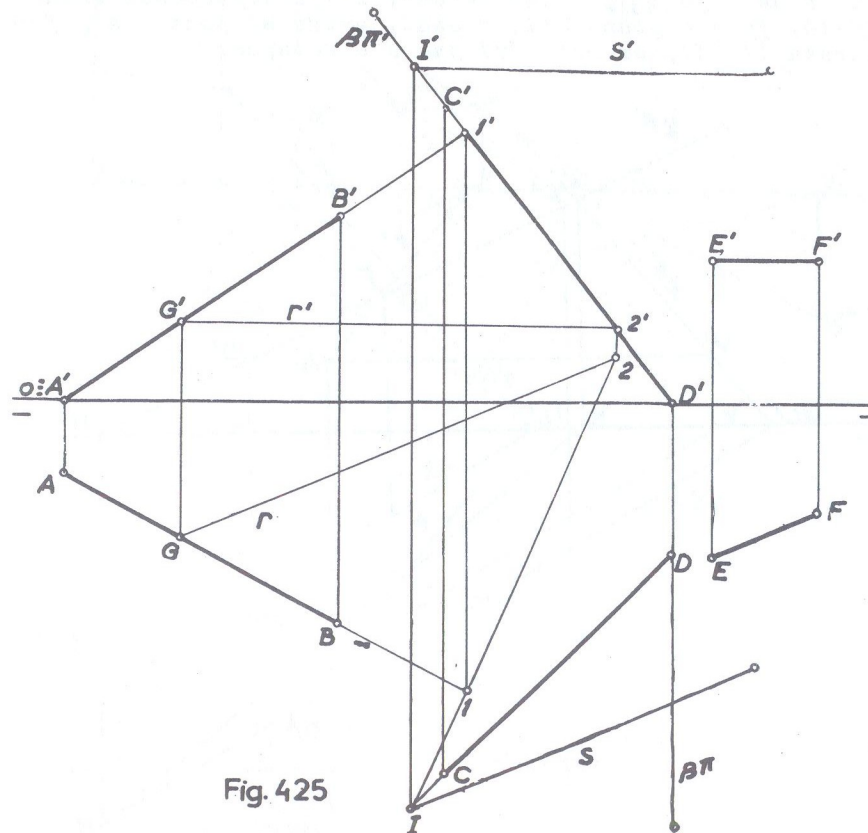



Fig. 425

160 • Por um ponto dado (A), traçar uma reta (r) paralela a um plano (α) que contém o ponto (T) e que se apoie numa reta dada (C)(D).

(A) [2,5 ; 3 ; 1] (T) [0 ; 0 ; 0]

(C) [-0,5 ; 2,5 ; 3] $\widehat{\alpha\pi'} = 50°$

(D) [3,5 ; 1,5 ; 1] $\widehat{\alpha\pi} = -30°$

1.a SOLUÇÃO: (fig. 426)

Traça-se pelo ponto dado, um plano paralelo ao plano dado e determina-se o ponto onde a reta fura esse plano, o qual, unido ao ponto dado, determina a reta pedida.
Traçou-se então a horizontal (A)(V) e pelo traço V', paralelamente ao traço $\alpha\pi'$ do plano dado, faz-se passar o traço vertical $\beta\pi'$ do plano paralelo a (α) e por (J), o traço $\beta\pi$ paralelo a $\alpha\pi$. O plano (β) é assim paralelo ao plano (α) passando por (A). Utilizando-se como plano projetante da reta (C)(D) o de topo(γ) , obtém-se em (I) o ponto onde essa reta (C)(D) fura o plano (β), o qual, unido ao ponto (A), fornece a reta (A)(I), ou reta (r) que é a solução.

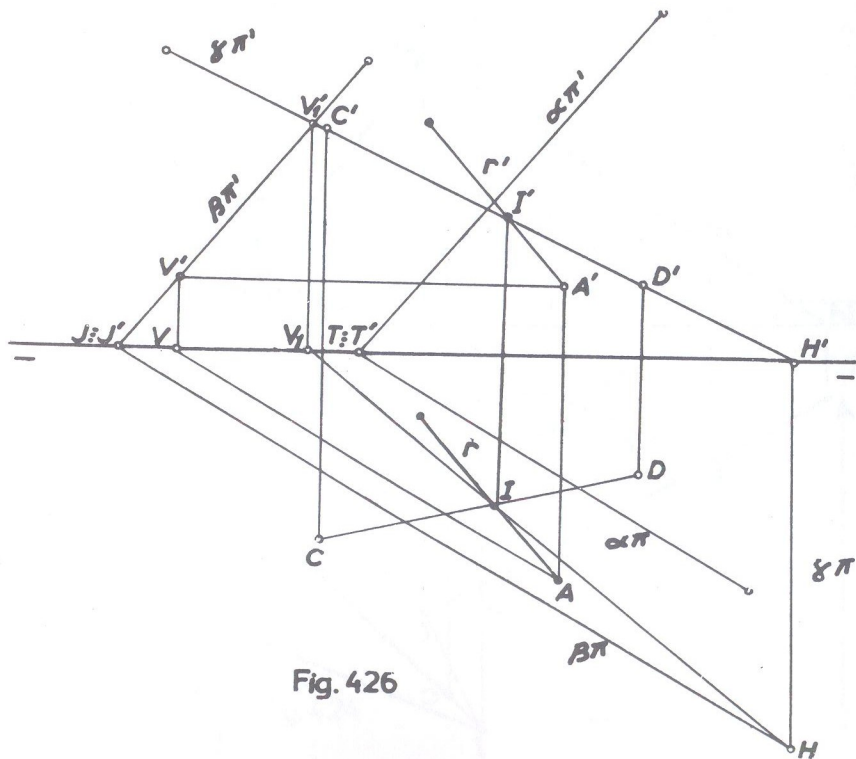



Fig. 426

2.a SOLUÇÃO: (fig. 427)

Podemos empregar uma 2.a solução (fig. 427).
Une-se o ponto (A) dado, a um dos pontos da reta dada, (D) por exemplo, o que determina o plano (β) definido pelas retas concorrentes (A)(D) e (D)(C). A seguir, procura-se a interseção

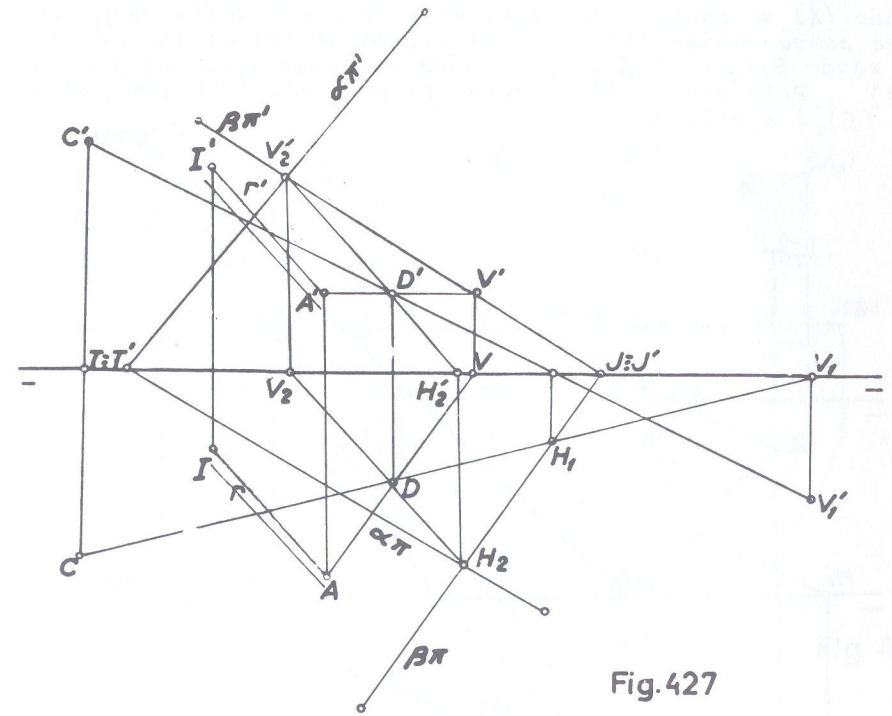



Fig. 427

dos dois planos (α) e (β) , que é a reta $(V_2)(H_2)$ e, pelo ponto (A), traça-se a reta (r) ou (A)(I), paralela à reta interseção $(V_2)(H_2)$, onde o ponto (I) é tomado arbitrariamente.

161• Por um ponto (A), traçar uma reta paralela a um plano (α) que é paralelo a $\pi\pi'$, e que encontre uma reta (B)(C).

(A) [0 ; 5,5 ; 2] $\alpha\pi' = 3,5$

(B) [2 ; 2,5 ; 0] $\alpha\pi = 5$

(C) [8 ; 0 ; 6]

SOLUÇÃO: (fig. 428)

Adotando a 2.a solução do exercício anterior, uniu-se o ponto dado (A) ao ponto (B), resultando no plano definido pelas retas concorrentes (A)(B) e (B)(C), cujos traços são $\beta\pi$ e $\beta\pi'$ e sendo H_1V_2 e $H_1'V_2'$ as projeções da interseção dos planos (α) e (β). Pelo ponto (A), a reta (r) paralela à interseção de (α) e (β), é a solução.

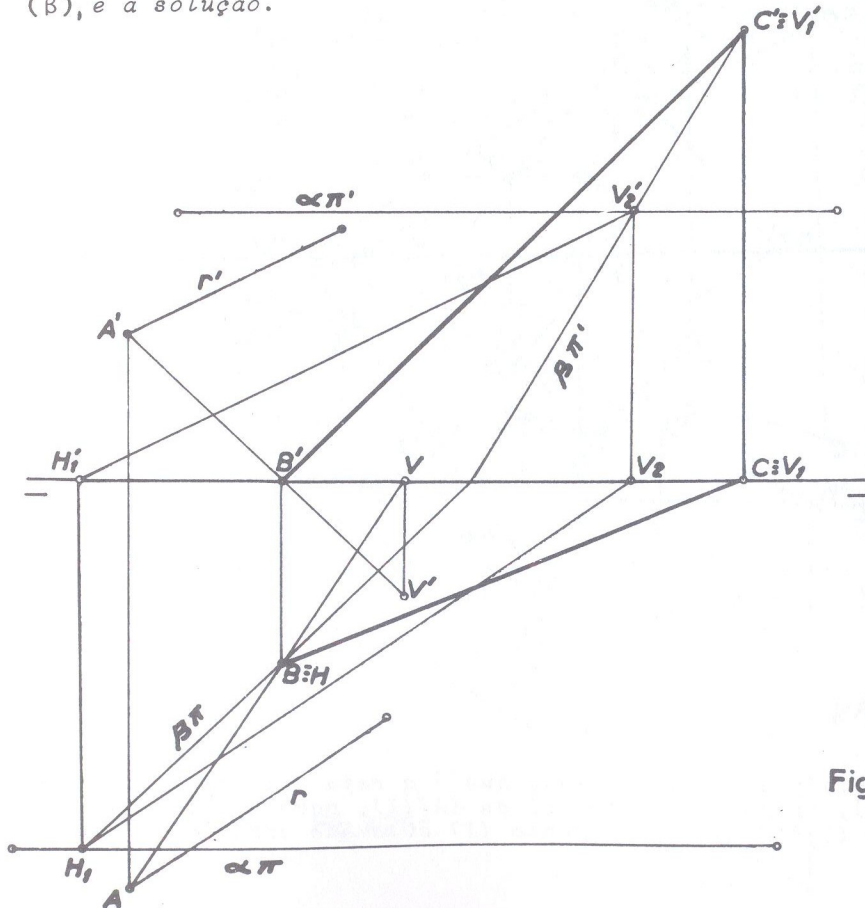



Fig. 428

162• Por um ponto dado (A), traçar uma reta paralela ao plano $\pi\pi'$(M) e que se apoie numa reta de perfil (B)(C).

(A) [0 ; 2 ; 3] (C) [? ; 1,5 ; 2]

(B) [2 ; 0,5 ; 3] (M) [2 ; 2,5 ; 1]

SOLUÇÃO: (fig. 429)

Rebate-se o plano (α) de perfil que contém o ponto (M) e tem-se (M_1) e a reta (B)(C) e (B_1)(C_1). A reta (T)(M_1) é a interseção do plano de perfil com o plano dado definido pelo ponto e pela linha de terra. Traçando-se por (A_1), paralelamente à interseção (T) (M_1), tem-se (A_1) (D_1) situando-se (D_1) sobre (B_1)(C_1). Desfeito o rebatimento, o ponto (D_1) fornece as projeções D e D' que unidos respectivamente às projeções de (A), resulta na reta solução, de projeções AD, A'D'.

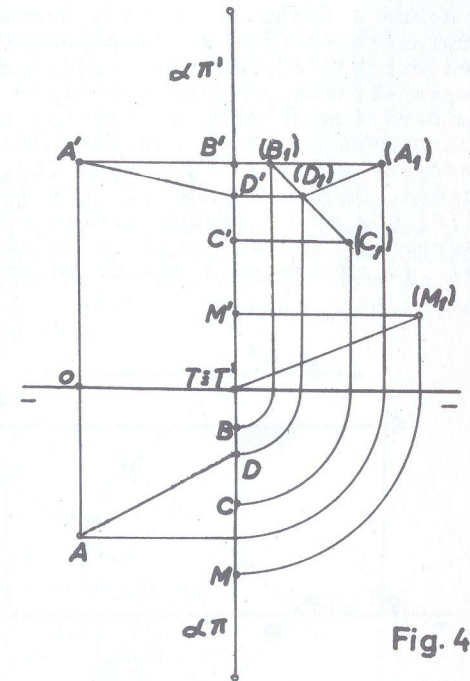



Fig. 429

163• Determinar os traços de um plano definido pela reta (A)(B) e ponto (M) e, por um ponto (C) do referido plano, traçar um plano paralelo ao (β_I)

(A) [0 ; 1 ; 2,5] (M) [4 ; 3 ; 1]

(B) [8 ; 1 ; 2,5] (C) [8 ; 2 ; ?]

SOLUÇÃO: (fig. 430)

A reta (A)(B) é frontohorizontal. Para se determinar o plano que ela e o ponto (M) definem, procede-se como no exercício 54 (fig. 274). Obtém-se assim o plano (α) paralelo à linha de terra.
Para se traçar pelo ponto (C) um plano paralelo ao (β_I) ver a Obs. da fig. 315. Antes, porém, é necessário determinar a cota desse ponto (C) que não é dada; para isso, traça-se CN que é a projeção horizontal de uma frontohorizontal ao plano, situando-se a projeção N sobre HV, que dá N' sobre H'V' e, de N' a projeção vertical dessa frontohorizontal, que faz conhecer C' sobre a linha de chamada correspondente. E verifica-se que a cota é menor que o afastamento, aplicando-se então a Obs. acima citada, e portanto, definindo o plano (β) pedido, cujos traços estarão em coincidência e abaixo da linha de terra.
Uma verificação pode ser feita, operando pelo método clássico: toma-se um ponto qualquer (F) que pertença ao (β_I) e um ponto (E) sobre ππ'; a reta (E)(F) será do bissetor como é evidente. Do ponto dado (C) traça-se a paralela a essa reta (E)(F) por cujos traços passarão os traços do plano pedido. Observa-se que há perfeita coincidência nos traços do plano (β) já obtido pelo método anterior.

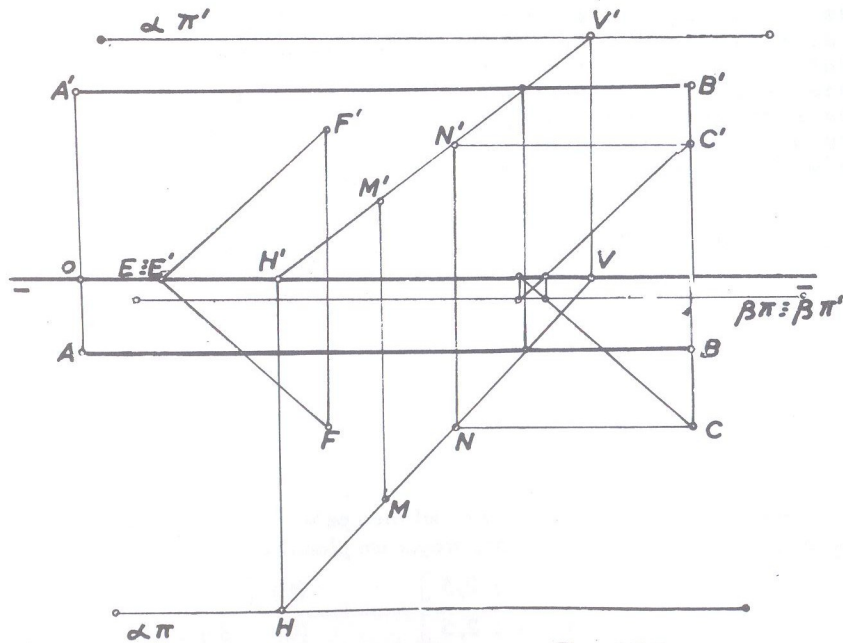



Fig.430

164. Um plano é definido pela reta (A)(B) e o ponto (M). Pede-se construir:

a) O pé, no (β_P), da perpendicular a ele traçada do ponto (M);

b) Os traços de plano definido pela reta (A)(B) e o ponto (M).

(A) [6 ; 3,5 ; 4]

(B) [6 ; -1 ; -0,5]

(M) [3 ; 1,5 ; 1,5]

SOLUÇÃO: (fig. 431)

a) Determina-se a perpendicular ao (β_P), traçando, pelo ponto (M) a reta de perfil (M)(N) de projeções iguais e de sentidos contrários (ver fig. 347 e respectiva descrição). A seguir, procura-se o ponto onde a reta (M)(N) fura o (β_P) o que ocorre em (I), que é o ponto pedido no 1º item.

b) Unindo-se o ponto (M) aos dois pontos (A) e (B) da reta de perfil, resulta num plano de duas retas concorrentes em (M) ou seja, retas (M)(A) e (M)(B). (Notar que o ponto de projeções B e B' está no 3º diedro). Pelos traços dessas duas retas concorrentes, passam os traços respectivos do plano (α) solução, que é perpendicular ao (β_P) por possuir seus traços em linha reta (απ≡απ').

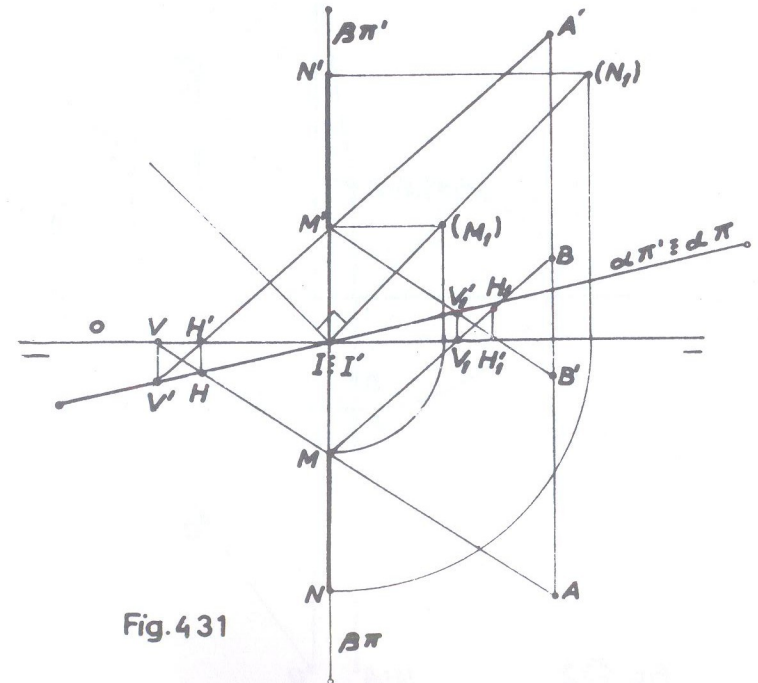



Fig.431

165• Sendo dadas as retas (A)(B) e (C)(D) não situadas no mesmo plano, pede-se:

a) construir uma frontal que se apoie nas retas dadas de tal modo, que a projeção vertical do segmento compreendido entre os pontos de apoio tenha o comprimento de 3 cm;

b) determinar sobre (A)(B) dois pontos, cuja relação entre cota e afastamento seja igual, respectivamente, a +1 e -1.

(A) [3 ; 5 ; 1,5] (C) [5 ; 3 ; 3]

(B) [3 ; 1 ; 1,5] (D) [7 ; 0 ; 1]

SOLUÇÃO: (fig. 432)

a) Todos os pontos da reta (A)(B), que é uma reta de topo, se projetam verticalmente em um único ponto. Então, todos os pontos de um plano frontal situados a 3 cm de A'B', existem sobre uma circunferência cujo centro é A'B' e raio 3 cm. Os pontos comuns a essa circunferência e a C'D', são as projeções verticais de dois pontos da reta solução. Então, com centro em A'B' traça-se a circunferência de raio igual a 3 cm, que corta C'D' em E' e seu prolongamento em G' que fazem conhecer respectivamente os pontos E e G. Duas são as retas soluções: (E)(F) e (G)(M).

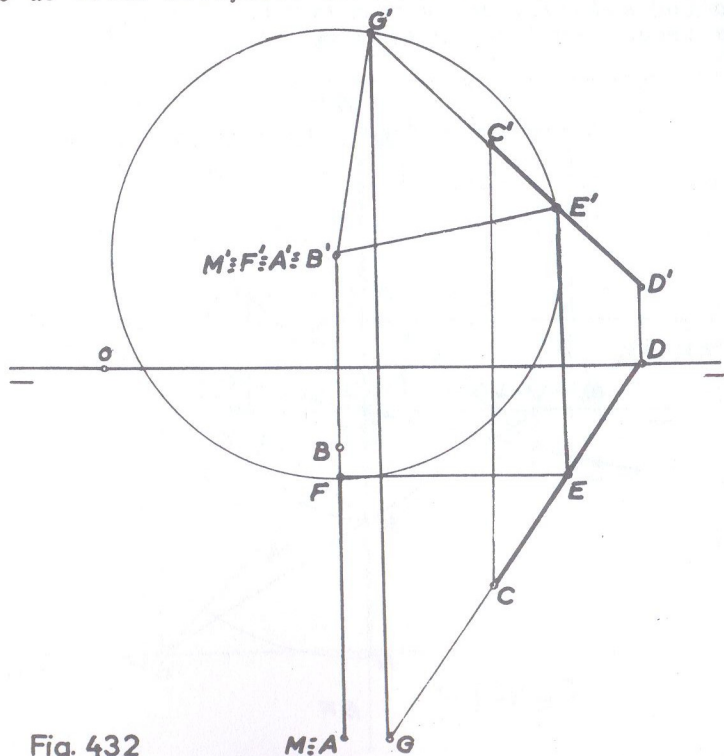



Fig. 432

b) na relação dada, os pontos pedidos são os que a reta fura os bissetores. Tratando-se de uma reta de topo, em que todos os pontos têm a mesma projeção vertical, verifica-se que (F) é o ponto onde a reta fura o (β_I) e nesse mesmo ponto (não assinalado para não sobrecarregar a épura) onde a mesma reta fura o (β_P).

166• Traçar uma reta que se apoie em três retas dadas, (A)(B), (C)(D), e (E)(F) não situadas duas a duas no mesmo plano.

(A) [2 ; 1 ; 1] (D) [7,5 ; 0 ; 5]

(B) [4,5 ; 4,5 ; 0] (E) [10 ; 2 ; 2]

(C) [3,5 , 4 ; 0] (F) [13 ; 0 ; 5]

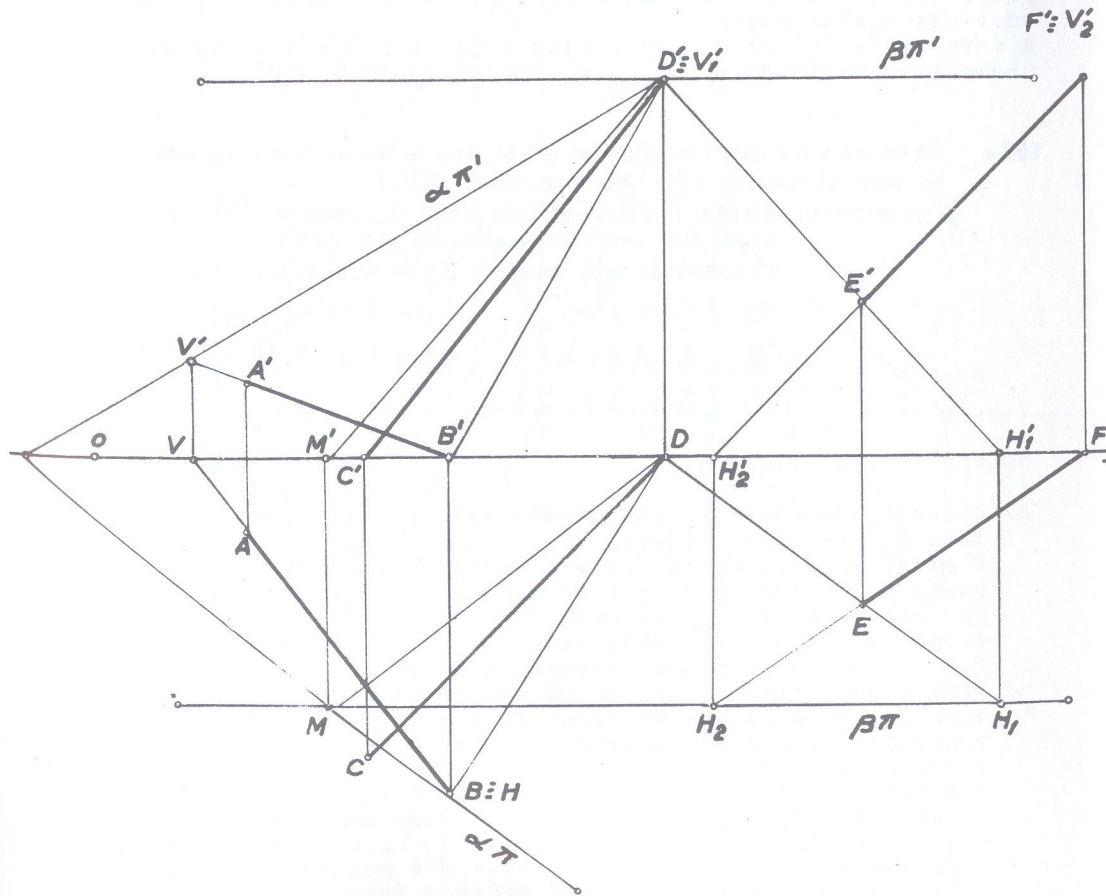



Fig. 433

SOLUÇÃO: (fig. 433)

Toma-se um ponto qualquer sobre qualquer das retas dadas, como no caso, por exemplo, o ponto (D). Esse ponto e cada uma das retas (A)(B) e (E)(F) definem dois planos cuja interseção é a reta pedida.
Assim, o ponto (D) e a reta (A)(B) definem o plano (α), cujo traço vertical απ' passa pelos traços V' e V_1' das retas (A)(B) e (B)(D), o mesmo acontecendo com o traço horizontal απ que passa por (H), pois esse traço é o mesmo das duas citadas retas.
Da mesma forma, o ponto (D) e a reta (E)(F) definem o plano (β), paralelo a ππ', cujo traço vertical βπ' passa por V_1' e V_2' que são os traços verticais das retas (D)(E) e (E)(F) e o traço horizontal βπ por H_1 e H_2 que são os traços horizontais das mesmas retas.
A interseção (M)(D) dos dois planos (α) e (β) é a solução, representada na épura, pelas suas projeções MD e M'D'.

167 • Dá-se um plano definido pela reta (A)(B), de máximo declive e um outro plano perpendicular ao ($β_P$) contendo a reta (C)(D).
Sem empregar os traços do plano definido por (A)(B), pede-se:
a) por (M), uma reta paralela aos dois planos;
b) sobre essa reta, um ponto (K) de cota igual a -2cm.

(A) [1 ; 1 ; 0,5] (D) [10 ; 2 ; 0,5]
(B) [4 ; 2,5 ; 2,5] (M) [5 ; 1,5 ; 1,5]
(C) [7,5 ; 0,5 ; 2,5]

SOLUÇÃO: (fig. 434)

a) A reta paralela aos dois planos será evidentemente a paralela à interseção deles.
O plano que contém (C)(D) é facilmente determinado porque passa pelos traços V' e H da reta e tem seus traços em linha reta por ser perpendicular ao ($β_P$). É o plano (α), de traços απ' e απ em linha reta.
Para se determinar a interseção do plano (α), com o definido pela reta (A)(B) de máximo declive, usamos, como já sabemos, dois planos horizontais auxiliares. O primeiro, de traço βπ', no caso, passando por A' e D' tem as seguintes interseções:
- a horizontal (A)(E) com o plano da reta (A)(B) onde AE é perpendicular a AB e E' sobre o traço do plano (β);
- a horizontal (V_1)(G), com o plano (α), onde V_1 é o ponto de encontro dos traços verticais dos planos e V_1G paralela a απ, situando-se G' sobre o traço βπ'.
O ponto (G) é o ponto comum às duas interseções auxiliares.

A seguir, operando-se de modo inteiramente análogo com um segundo plano horizontal auxiliar, (γ) no caso, passando por B' e C', obtém-se o ponto (I), comum às duas novas interseções auxiliares.
Unindo-se (G)(I) tem-se a reta interseção dos dois planos dados e pelo ponto (M) a reta (r) paralela a (G)(I), que soluciona o primeiro item.

b) Sobre a reta (r), toma-se o ponto (K) de cota -2, que é um ponto no 3º diedro, situando-se a projeção vertical K' sobre o prolongamento de r' e a projeção K; consequentemente sobre o prolongamento da projeção horizontal r da reta.

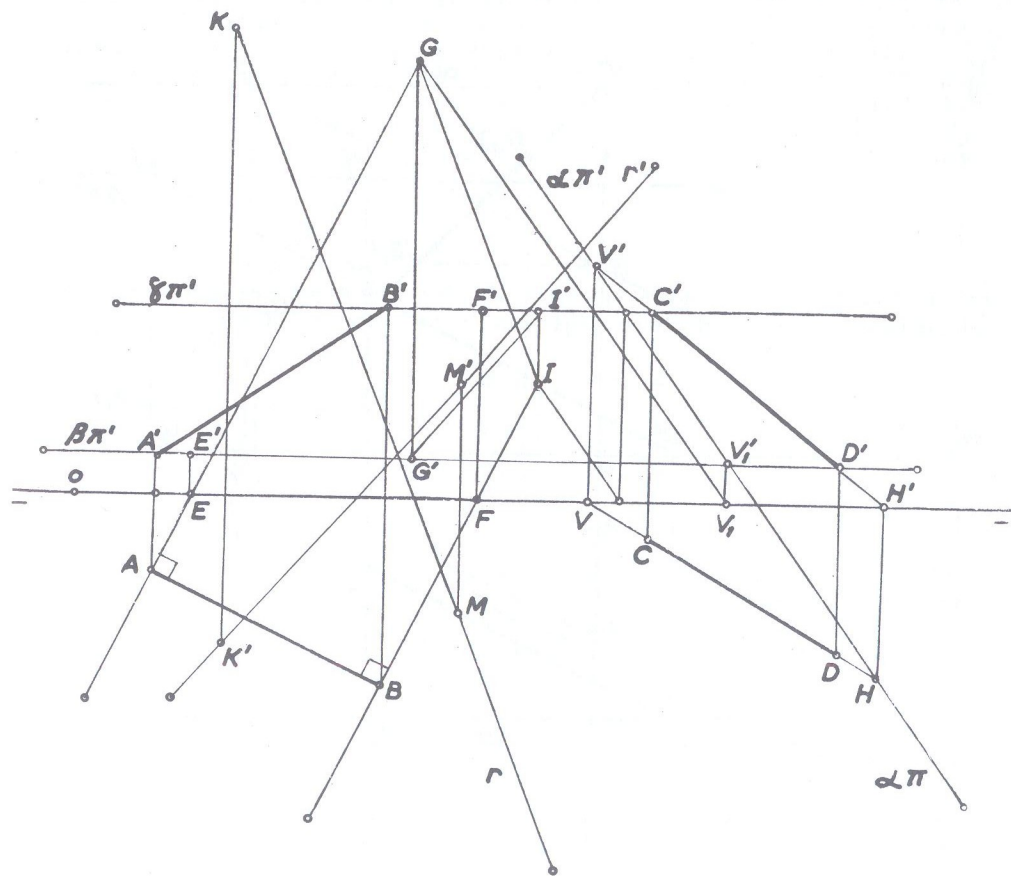



Fig. 434

168 • Dão-se as retas (A)(B) e (C)(D), sendo (A)(B) perpendicular ao (β_I) e (C)(D) paralela ao (β_P).
Pede-se construir os traços de dois planos paralelos conduzidos por essas retas.

(A) [0 ; 1 ; 3] (B) [? ; ? ; ?]

(C) [3 ; 1,5 ; 2] (D) [-1 ; ? ; 0]

SOLUÇÃO: (fig. 435)

Para que dois planos sejam paralelos, basta que um deles contenha duas retas concorrentes paralelas ao outro.

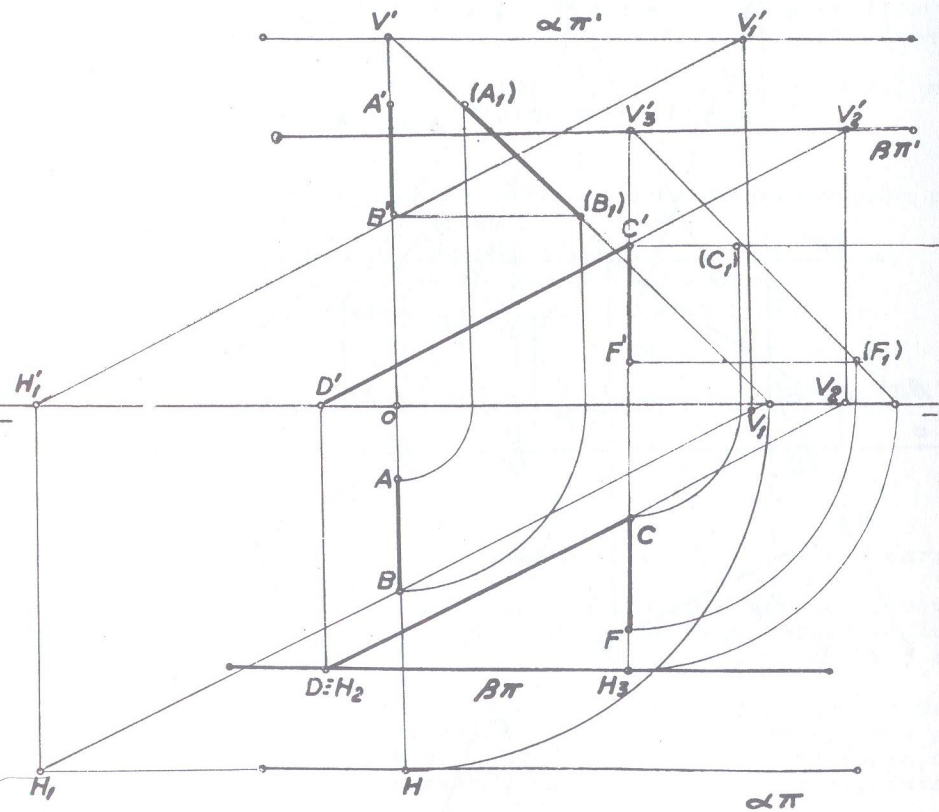



Fig. 435

No caso presente, o ponto (B) é facilmente determinado porque sendo (A)(B) perpendicular ao (β_I), terá que ser de perfil e projeções iguais em grandeza e sentido, onde o ponto (B) é tomado arbitrariamente. Da reta (C)(D) não é conhecido o afastamento do ponto (D) mas, sendo paralela ao (β_P), suas projeções são paralelas.
Então, por um ponto qualquer de qualquer das retas, (B) por exemplo, da reta de perfil, traça-se uma paralela à reta (C)(D), de que resulta duas retas concorrentes em (B) e por cujos traços passam os traços do plano (α), paralelo a ππ'. Pelos traços da reta (C)(D), que são V_2 e H_2, passam os traços do plano (β) paralelo ao anterior (α).
Como verificação, se de um ponto qualquer da reta (C)(D), -por exemplo do ponto (C) - traçarmos uma reta (C)(F) paralela à reta (A)(B) dada, os traços dessa outra reta de perfil (C)(F) devem se situar sobre os traços correspondentes do plano (β). Efetivamente isso ocorre, como se vê na épura, onde V_3 e H_3 que são os traços de (C)(F) estão sobre βπ' e βπ respectivamente.

169 • Conhecidos o ponto (M) e a reta (A)(B), pede-se construir, sem utilizar traços de planos, uma reta por (M) que seja paralela ao (β_I) e perpendicular a (A)(B)

(M) [0 ; 3 ; 4]

(A) [1 ; 3 ; 5]

(B) [4 ; 1 ; 0]

SOLUÇÃO: (fig. 436)

É suficiente traçar por (M), um plano perpendicular a (A)(B) e determinar sua interseção com o (β_I). A reta que passando por (M) seja paralela a essa interseção, resolve o problema.
Traça-se a horizontal (M)(C), auxiliar, em que a projeção MC é perpendicular à projeção AB, situando-se C' sobre a paralela à linha de terra traçada por M'.
Da mesma forma traça-se a frontal (M)(D) em que a projeção M'D' é perpendicular à projeção A'B', situando-se D sobre a paralela à linha de terra traçada por M. O plano definido por essas duas auxiliares, horizontal (M)(C) e frontal (M)(D), é o plano perpendicular à reta dada, do qual entretanto, por imposição dos dados, não se pode achar os traços.
Para determinar sua interseção com o (β_I) é suficiente achar os pontos (E) e (F) que pertençam ao bissetor considerado; assim, marca-se M_1' com o mesmo afastamento de (M) e a reta de projeções CM, CM_1' é do bissetor e que intercepta M'C' no seu prolongamento em E' que dá E sobre o prolongamento de MC.

Da mesma forma, marca-se M_1 com a mesma cota de (M), e, a reta de projeções D'M', D'M_1 é do bissetor e intercepta DM em F que fornece F' sobre D'M'. Então (E)(F) é a interseção procurada e por (M) traça-se a reta (r) paralela a essa interseção e que é a solução.

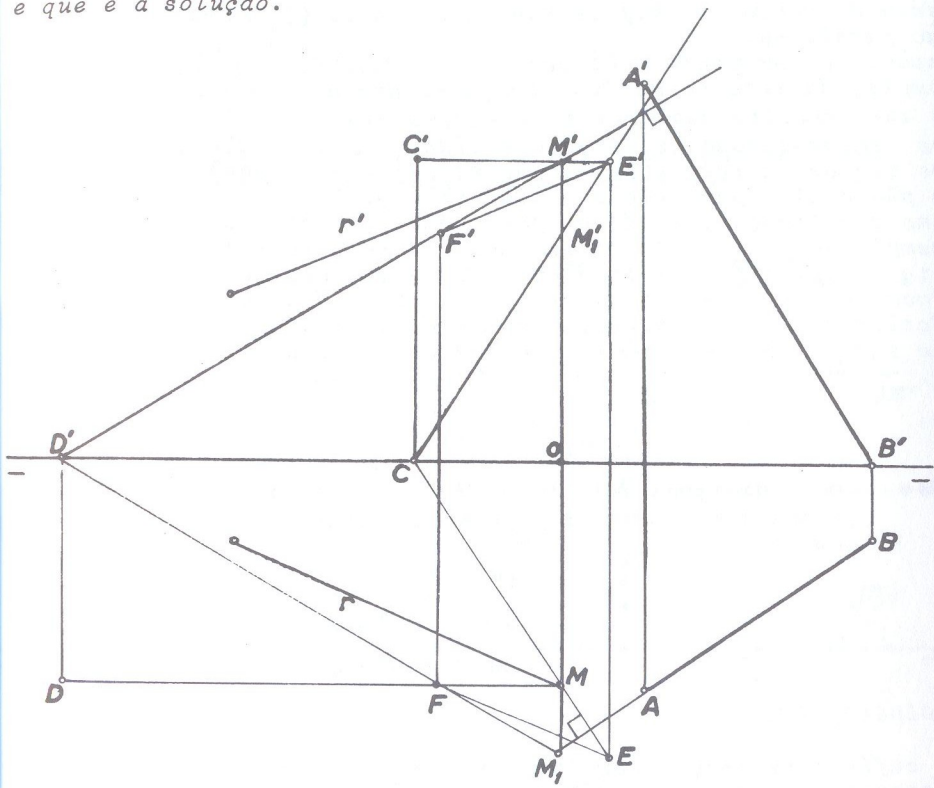



Fig. 436

170 • Traçar por uma reta (A)(B) dois planos, sendo um perpendicular ao(β_I) e outro perpendicular ao (β_P).

(A) [1 ; 2 ; 3,5]   (B) [4 ; 1 ; -2]

SOLUÇÃO: (fig. 437)

Como já se sabe, para se traçar por uma reta um plano perpendicular a outro, tomamos sobre (A)(B) um ponto qualquer, (A) por exemplo, e por ele traçamos a reta de perfil (A)(C) perpendicular ao (β_I), ou seja, reta com segmentos iguais em grandeza e mesmo sentido.

Temos assim um plano definido por duas retas concorrentes (A)(B) e (A)(C) que é o plano (α), de traços $\alpha\pi$ e $\alpha\pi'$ simétricos em relação à linha de terra, pois o plano (α) é perpendicular ao(β_I).

Também pelo ponto (A), traça-se outra reta de perfil perpendicular ao (β_P); é suficiente tomar um segmento (A)(D), com segmentos iguais em grandeza mas de sentidos contrários. Temos assim outro plano definido pelas retas concorrentes (A)(B) e (A)(D), que é o plano (β) de traços em linha reta pois é perpendicular ao(β_P).

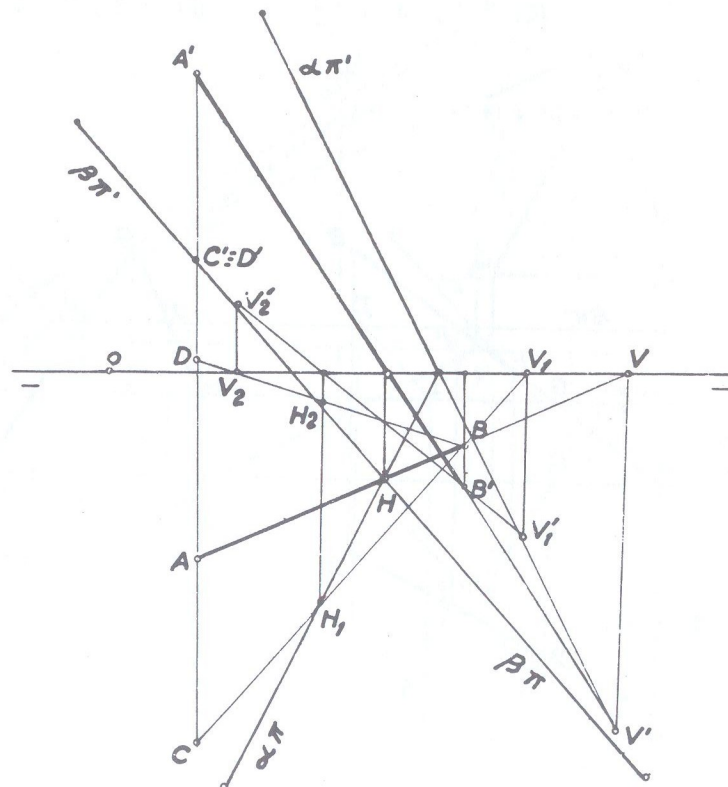



Fig.437

171 • Dá-se um plano definido pela reta de máximo declive (A)(B) e outro definido pelas retas (C)(D) e (D)(E). Pede-se:

a) as projeções da reta que, contida no plano definido pela reta (A)(B), passa pelo ponto (F) da reta (A)(B) e é paralela ao plano das retas (C)(D) e (D)(E). (Operar sem determinar traços de planos);

b) em outra épura, dar os traços do plano que contendo a reta (A)(B), é perpendicular ao plano das retas (C)(D) e (D)(E).

(A) [1 ; 3 ; 0] (D) [8 ; 1,5 ; 3]

(B) [5 ; 1 ; 3] (E) [10 ; 1 ; 0]

(C) [7 ; 3 ; 1] (F) [3 ; ? ; ?]

SOLUÇÃO: (fig. 438 e 439)

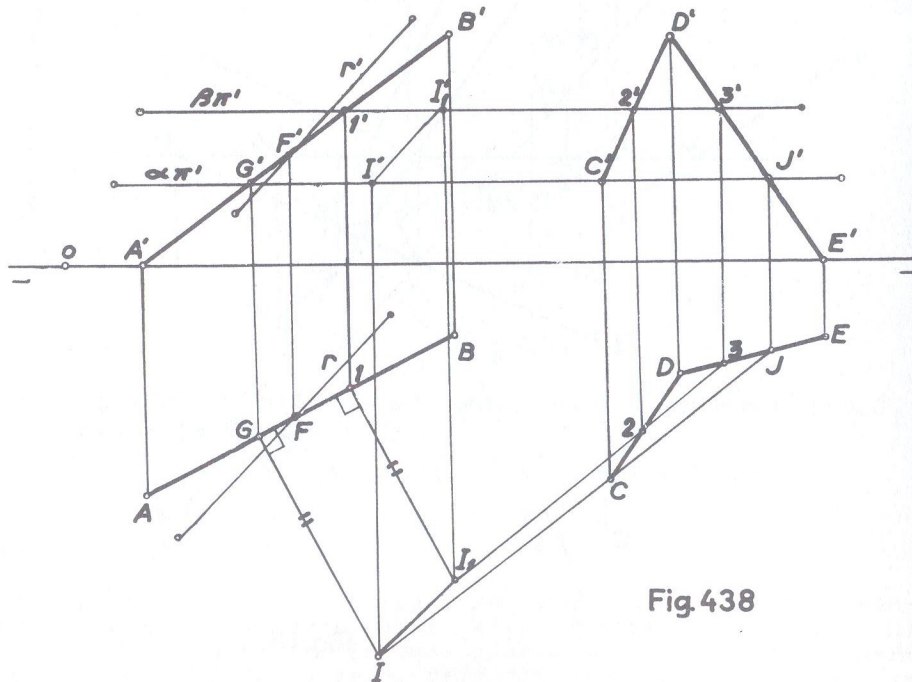



Fig. 438

Item a: (fig. 438)

Sendo uma reta paralela a um plano quando for paralela a uma reta desse plano, determina-se a interseção dos planos definidos pela reta de máximo declive e pelas retas concorrentes. Toda reta que for paralela a essa interseção, será paralela ao plano das retas (C)(D) e (D)(E).
Então, com auxílio dos planos horizontais auxiliares (α) e (β), determina-se a interseção já mencionada, que é a reta (I)(I_1); pelo ponto (F), traça-se a reta (r) paralela a (I)(I_1), que é a solução.

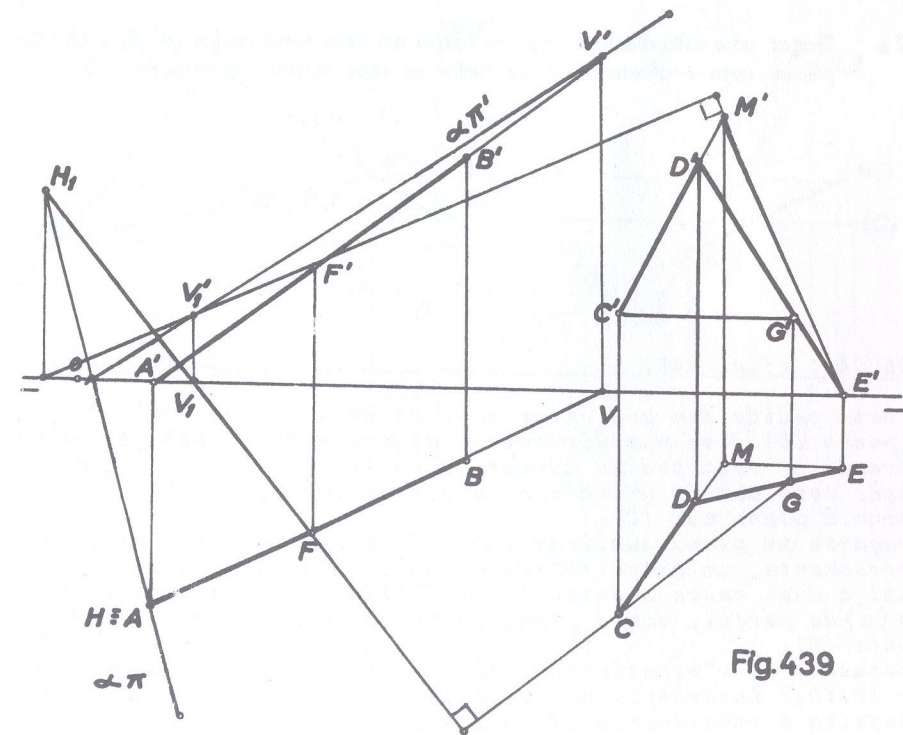



Fig. 439

Item b: (fig. 439)

Sendo um plano perpendicular a outro quando contém uma reta que lhe seja perpendicular, basta traçar por um ponto qualquer de (A) (B), uma reta perpendicular ao plano das retas (C)(D) e (D)(E). As duas retas assim concorrentes definirão um plano e que soluciona a questão.

Traça-se então uma horizontal (C)(G) e uma frontal (E)(M) do plano das retas (C)(D) e (D)(E). Pelo ponto (F) dado, sobre (A)(B), traça-se uma reta perpendicular ao plano das retas, ou seja, projeção horizontal FV_1 perpendicular à projeção de mesmo nome CG, e projeção vertical $F'V_1'$ perpendicular à projeção de mesmo nome M'E'. O plano (α) que passar pelos traços das duas retas (A)(B) e (F)(V_1), soluciona o problema, visto conter (A)(B) e ser perpendicular ao plano (C)(D)(E).

172 • Traçar uma reta qualquer que se apoie em duas retas dadas (A)(B) e (A)(C) possue cota e afastamento de todos os seus pontos na relação 1/2.

(A) [2,5 ; 5 ; 4]

(B) [0 ; 3 ; 1]

(C) [5,5 ; 5,5 ; 2]

SOLUÇÃO: (fig. 440)

A reta pedida tem que estar contida em um plano ππ' (D) onde o ponto (D) deve possuir cota e afastamento na relação dada. Devendo a reta pedida apoiar-se em (A)(B) e (A)(C), a retas solução será obtida unindo-se os pontos em que (A)(B) e (A)(C) furam o plano ππ' (D).
Traça-se um plano auxiliar (α), de perfil e sobre ele, arbitrariamente, um ponto (D) na relação dada de afastamento igual a duas vezes a cota. A reta (T)(D_1) é a interseção do plano (α) de perfil, com o plano definido pela linha de terra e ponto (D).
Efetuando-se o rebatimento, têm-se em (M_1) e (N_1) os pontos onde (T)(D_1) intercepta as retas $(A_1)(B_1)$ e $(A_1)(C_1)$ os quais, desfeito o rebatimento, fornecem M' sobre A'B' que dá M sobre AB e N' sobre A'C' que dá N sobre AC. Unindo-se esses dois pontos, tem-se na reta (M)(N) a solução, cujas projeções são MN, M'N' onde qualquer ponto dela está na relação dada.

Fig. 440

● Exercícios propostos

● Determinar as projeções de um ponto simétrico de um ponto (A):
a) em relação ao plano(π);
b) em relação ao(β_P).

A $\begin{bmatrix} y = 1 \\ z = 3 \end{bmatrix}$

II ● Determinar um ponto simétrico do ponto (A) em relação à linha de terra.

(A) [0 ; 2 ; 3]

III ● Conhecidas as projeções de um ponto (A), pede-se:
a) determinar as projeções de seu simétrico em relação à linha de terra;
b) determinar as projeções de seus simétricos em relação aos planos bissetores.

(A) [4 ; 2 ; 3]

IV ● Sobre a reta (A)(B), determinar um ponto de afastamento igual ao dobro da cota.

(A) [2 ; 4 ; 1]
(B) [8 ; 1,5 ; 4,5]

V ● Determinar uma reta frontohorizontal distante duas unidades do plano (π') e que pertença ao plano paralelo à linha de terra que contém a reta (C)(D).

(C) [3 ; 1 ; 3]
(D) [5 ; 3 ; 0]

VI ● Determinar uma reta que contenha o ponto (A) e que seja paralela à reta (B)(C).

(A) [1 ; 2 ; 3]
(B) [6 ; 3 ; -2]
(C) [6 ; -4 ; 3]

VII ● Determinar os traços da reta (A)(B) e as projeções de um ponto (C) sabendo-se que ele pertence à reta.

(A) [2 ; -3 ; 0]
(B) [2 ; 3 ; 4]
(C) [2 ; ? ; ?]

VIII ● Achar os traços do plano definido pelas retas (A)(B) e (C)(D). Explicar o resultado.

(A) [3 ; 1,5 ; 4]　(C) [3 ; -4 ; -1,5]
(B) [6 ; 4,5 ; 2]　(D) [6 ; -2 ; -4,5]

IX ● Construir uma reta que encontre duas outras (A)(B) e (C)(D) e que tenha as cotas e afastamentos de todos os seus pontos, na relação 2/5.

(A) [1 ; 2,5 ; 0,5]　(C) [6 ; 3 ; 1,5]
(B) [4 ; 0,5 ; 2]　(D) [5 ; 1 ; 3,5]

X ● Determinar a reta que passando pelo ponto (E), encontre as retas (A)(B) e (C)(D).

(A) [0 ; 2 ; 2]　(D) [7 ; 1 ; 2]
(B) [2 ; 5 ; 3]　(E) [4 ; 3 ; -1]
(C) [3 ; 1 ; 2]

XI ● Determinar uma reta (A)(B) que seja paralela ao (β_P) e o seu traço sobre o plano definido pela linha de terra e o ponto (M)

(A) [2 ; 2 ; 3]
(B) [5 ; ? ; 5]
(M) [8 ; 1 ; 2]

XII ● Traçar por um ponto dado (M) uma reta que passe pelo ponto de concurso de duas retas dadas (A)(B) e (C)(D), sabendo-se que esse ponto está situado fora dos limites da épura.

(A) [5 ; 1,5 ; 4]　(D) [11 ; 5 ; 1]
(B) [5 ; 4 ; 1]　(M) [7 ; 4 ; 2,5]
(C) [8 ; 2 ; 4]

XIII • Traçar uma reta que, além de se apoiar em duas outras dadas (A)(B) e (C)(D), encontre a linha de terra, e possui as cota e os afastamentos de todos os seus pontos, na relação 3/5.

(A) [2 ; 1 ; 3]   (C) [6 ; 1 ; 2]
(B) [5 ; 3 ; 1]   (D) [10 ; 3 ; 2]

XIV • Sendo dadas as retas (A)(B) e (C)(D) cujas projeções de nomes contrários coincidem, pede-se:
a) mostrar que elas são simétricas em relação ao (β_P);
b) os traços do plano definido pelas retas.

(A) [2 ; 2 ; 0]   (C) [2 ; 0 ; -2]
(B) [6 ; 0,5 ; 4]   (D) [6 ; -4 ; -0,5]

XV • Conhecida a projeção horizontal da reta (A)(B) assim como a projeção vertical do ponto (B), determinar a projeção vertical da reta (A)(B), sabendo-se que (A)(B) é paralela ao plano $\pi\pi'$ (M)

(A) [6 ; 1 ; ?]
(B) [9 ; 3 ; 4]
(M) [4 ; 2,5 ; 2]

XVI • Dão-se dois planos, sendo um definido pela linha de terra e o ponto (M) e o outro, vertical que contém a reta (A)(B). Pede-se construir uma reta que seja paralela a esses dois planos e se apoie em duas retas dadas (C)(D) e (E)(F).

(M) [10 ; 3 ; 2]   (D) [4 ; 2 ; 0]
(A) [7 ; 1 ; 2]   (E) [14 ; 2 ; 1]
(B) [9 ; 2 ; 1]   (F) [16 ; 0 ; 0]
(C) [2 ; 0 ; 2]

XVII • Determinar o traço horizontal de um plano, conhecendo-se o seu traço vertical paralelo à linha de terra e de cota igual a 2 e um ponto (A) do plano.

(A) [0; 1,5; 1]

XVIII • Dado um plano (α) que contém o ponto (T) pede-se:
a) uma reta de máximo declive do plano que passa por um ponto (M) do plano;
b) sobre a reta de máximo declive do item anterior, determinar um ponto de cota negativa e afastamento positivo, dizendo quais os diedros atravessados pela mesma;
c) um ponto do plano (α) de cota igual a 5 e afastamento igual a 6 cm.

(M) [4 ; 2 ; ?] $\widehat{\alpha\pi'} = 135°$
(T) [5 ; 0 ; 0] $\widehat{\alpha\pi} = -70°$

XIX • Determinar a interseção de um plano definido pelos pontos (A), (B) e (C) com o definido pela linha de terra e o ponto (M)

(A) [5 ; 0 ; 1]   (C) [9 ; 0 ; 4]
(B) [6,5 ; 3 ; 2]   (M) [12 ; 2,5 ; 3,5]

XX • Dado um plano definido pela sua reta de máximo declive (A)(B), pede-se determinar sua interseção:
a) com o plano definido pelos pontos (C), (D) e (E);
b) com o plano $\pi\pi'$ (M).

(A) [0 ; 3 ; 0]   (D) [10 ; 4 ; 4]
(B) [2 ; 1 ; 2]   (E) [13 ; 2 ; -3]
(C) [7 ; 1 ; 2]   (M) [-2 ; 3 ; 2]

XXI • Em épuras distintas, determinar a interseção do plano (α) que contém o ponto (J) com cada um dos seguintes planos:
a) frontal de afastamento 4;
b) horizontal de cota 5;
c) de topo que contém os pontos (A) e (T)

(J) [9 ; 0 ; 0] $\widehat{\alpha\pi'} = 150°$
(A) [2 ; 0 ; 3] $\widehat{\alpha\pi} = -60°$
(T) [4 ; 0 ; 0]

XXII • - Dado um plano definido pela sua reta de máximo declive (A)(B), pede-se:

a) os traços do plano;

b) uma horizontal desse plano de cota negativa, igual a -3;

c) os traços de um plano que, passando pelo ponto (M), seja perpendicular ao plano dado e contenha uma paralela a (A)(B) passando por (M).

(A) [4 ; 1,5 ; 0,5]

(B) [6 ; 0,5 ; 3]

(M) [10 ; 2 ; 2]

XXIII • São dados dois planos: um, definido pela reta de máximo declive (A)(B) e outro, representado pelas retas (C)(D) e (D)(E).

a) as projeções de uma reta que, contida no plano definido por (A)(B), passe pelo ponto (F) de (A)(B) e seja paralela ao plano das retas (C)(D) e (D)(E). (Operar sem recorrer aos traços dos planos);

b) determinar, em outra épura, as projeções do ponto em que a reta encontrada no item anterior, fura o (β_I), assim como as projeções de outro ponto da referida reta, cuja cota e afastamento estejam na relação 2/3.

(A) [4 ; 3 ; 0] (D) [16 ; 1 ; 3]

(B) [9 ; -1 ; 3] (E) [17 ; 2 ; 0]

(C) [15 ; 3 ; 1] (F) [6 ; ? ; ?]

XXIV • Por uma reta (A)(B), traçar um plano perpendicular a um plano determinado pela linha de terra e o ponto (C). Achar a interserseção dos dois planos.

(A) [0 ; 2 ; 3,5]

(B) [-2 ; 1,5 ; 3]

(C) [0 ; 4 ; 2,5]

XXV • Por uma reta (A)(B), traçar um plano perpendicular ao plano $\pi\pi'$ (M).

(A) [3 ; 1,5 ; 2]

(B) [6 ; 3 ; 4]

(M) [6 ; 4 ; 2]

XXVI • Por uma reta (A)(B), traçar um plano perpendicular ao plano de perfil (α), que contém o ponto (K).

(A) [1 ; 3 ; 4]

(B) [4 ; 0,5 ; 7]

(K) [5 ; 0 ; 0]

XXVII • Achar o traço da frontohorizontal que contém o ponto (A), no plano definido pelos pontos (B), (C) e (D).

(A) [2 ; 2 ; 4] (C) [9 ; 4 ; 6]

(B) [3 ; 1 ; 2] (D) [7 ; 0 ; 2]

XXVIII • Dados, o plano (α) que contém o ponto (J) e é perpendicular ao (β_P) e a reta (A)(B) paralela ao (β_P), determinar o traço da reta no plano.

(J) [5 ; 0 ; 0] (B) [8 ; ? ; 1]

(A) [2 ; 3 ; 4] $\widehat{\alpha\pi'} = 30°$

XXIX • Achar a interseção de uma reta (A)(B) com o plano (α) paralelo à linha de terra.

(A) [4 ; 1 ; 4] $\alpha\pi' = 5$

(B) [7,5 ; 0 ; 2,5] $\alpha\pi = 2,5$

XXX • Por um ponto (M) de uma reta de perfil (A)(B), traçar uma horizontal que encontre o plano vertical a 3 cm do ponto (A)

(M) [4 ; ? ; 1,5]

(A) [4 ; 0 ; 3,5]

(B) [? ; -0,5 ; 2,5]